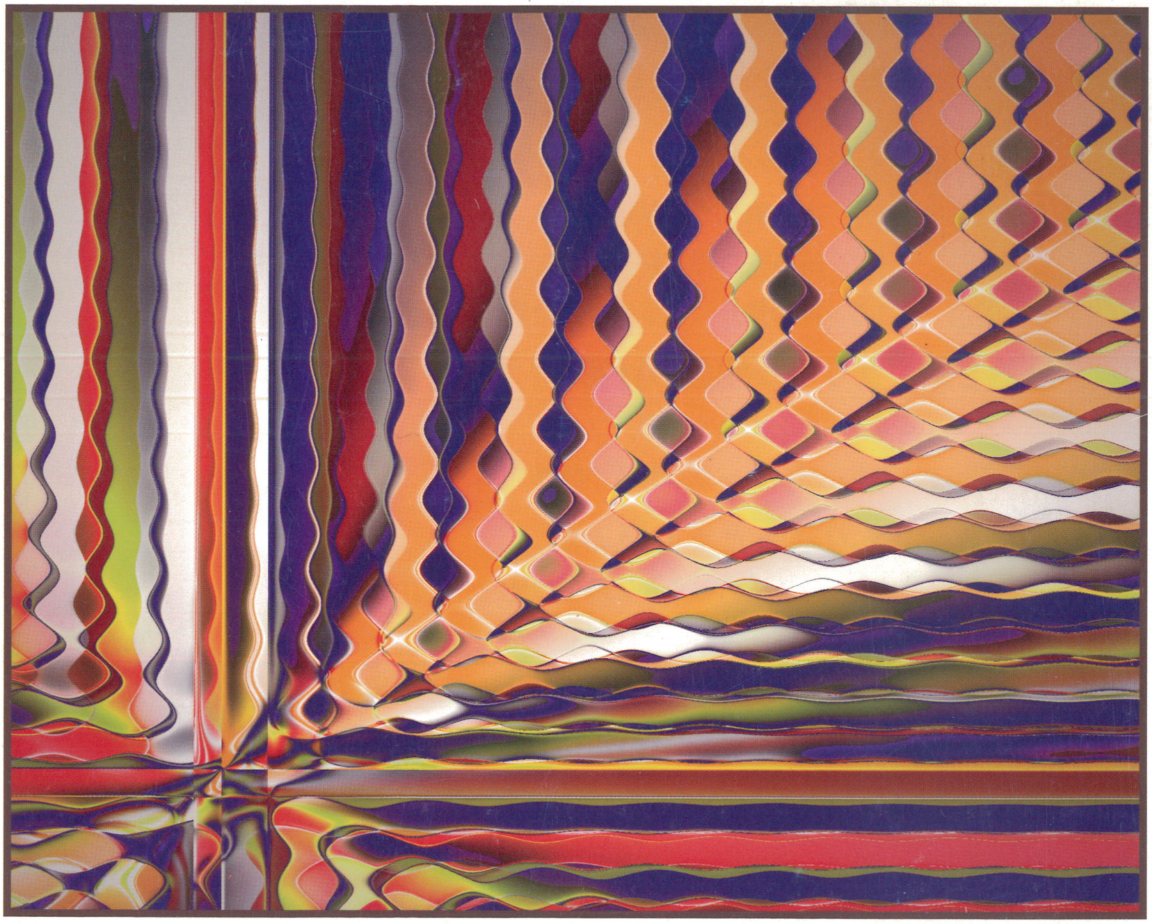
昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2008年1月1日発行　第46巻1号　毎月1回1日発行
ISSN 0386—2240

数理科学

1
2008

特集 現象を視る
〈現象数理科学〉への誘い



No.535

サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 535 January 2008

現象を視る

〈現象数理科学〉への誘い

表紙：戸川　隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．**郵送料小社負担**にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は 1 年間（本誌のみ）11,000 円，1 年間（本誌＋別冊 2 冊）14,500 円，半年間（本誌のみ）5,500 円，半年間（本誌＋別冊 1 冊）7,250 円です．（税込み価格）

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63 年/7～2005 年/1 省略
2005 年/2　エンタングルメント理論とその展開
/3　最新 脳の数学理論
/4　量子重力理論最前線
別冊　相対論の歩み
/5　ベクトル
/6　物理法則と方程式
/7　量子異常とは何か
/8　モジュライの広がり
/9　対称性とは何か
/10 不確定性原理の新展開
別冊　スーパーストリング
/11 0 の発見
/12 現代代数学への誘い
2006 年/1　偶然から必然へ
/2　物理法則の直観的理解
/3　〈強い力〉
/4　「空間」とは何か
別冊　量子の新世紀
/5　数学と物理の対話
/6　発見とひらめき
/7　重力は語る
/8　ネットワーク科学の数理
/9　ランダムネス
/10 ツイスター理論の拡がり
別冊　場の量子論の拡がり
/11 固有値問題のひろがり
/12 素粒子像の探究
2007 年/1　ヤング図形で遊ぶ物理と数学
/2　ランダム行列の広がり
/3　現代物理における超対称性
/4　現代数学はいかに使われているか［代数編］
別冊　双対性の世界
/5　数学の直観的理解
/6　物理における位相の世界
/7　代数的物理観
/8　数学における場の量子論
/9　ディラック
/10 フーリエ解析の力
別冊　素粒子物理学の発展
/11〈電弱統一理論〉
/12「時空」への問いかけ

数理科学臨時別冊一覧

07 年/1　ゲノム進化を考える
07 年/3　非平衡統計力学
07 年/5　超幾何関数入門
07 年/6　相対性理論
07 年/7　3 次元トポロジーの新展開
07 年/9　数理・情報系のための整数論講義
07 年/11 コンピュータ将棋の頭脳
07 年/12 計算神経科学への招待

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店（新宿）
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店（立川）
くまざわ書店本店（八王子）
くまざわ書店桜ヶ丘店（多摩）
書泉グランデ（神田）
書泉ブックタワー（秋葉原）
三省堂本店（神田）
ブックファースト渋谷店
リブロ池袋店
ジュンク堂書店（池袋）
ジュンク堂書店（新宿）
芳林堂（高田馬場）
八重洲ブックセンター（東京駅前）
丸善丸の内本店（東京駅前）
ブックファースト青葉台店（横浜）
栄松堂ジョイナス店（横浜）
有隣堂イセザキ町店（横浜）
有隣堂西口・東口（横浜）
有隣堂厚木店（厚木）
文教堂ブックセンター（川崎）

旭屋船橋店
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店（大阪）
旭屋本店（大阪）
アバンティブックセンター（京都）
ジュンク堂書店（京都）
ジュンク堂書店（神戸）
ジュンク堂三宮駅前店（神戸）
ジュンク堂書店（大分）
喜久屋書店倉敷店
紀伊國屋書店松山店
紀伊國屋書店福岡店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
紀伊國屋書店新潟店
旭屋札幌店
金港堂（仙台）
金港堂パーク店（仙台）
ジュンク堂書店（仙台）
鹿島ブックセンター（いわき）
友朋堂（つくば）

――大学生協・売店――
東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
電気通信大学・福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店

January 2008 MATHEMATICAL SCIENCES Number 535

特集／現象を視る

現象数理科学への誘い

三村　昌泰

数学の発展が科学，工学，医学等に現れる現象に直接，間接的に繋がりを持って進んでいることは今更述べるまでもないでしょう．極端な例ですが，純粋に数学的な動機で得られた成果であっても，現象の理解に役立った例はいくつもあげることができます．このことから，数学は自然科学，社会科学を超えて様々な分野に関連している学問であると言われ，最近では，数学と数理科学を同じ意味でも用いられていることもあります．

本特集号で紹介する「現象数理科学」は，上での「数理科学」とは若干異なり，「現象を視て，理解する」，もっと正確に言えば，「現象を数理的に記述し，理解する」ことを目的（ミッション）としています．もちろんそのためには数学的手法を用い，開発をすることが必要ですから，広義の意味で数学の一分野であると言って良いかもしれません．実際，現象と数学を結ぶ橋渡しとなるモデルがすでに存在しているときには，数学的動機のみで研究を進めることができることもあります．だが，「現象を視る」ためのモデルが常に存在しているわけではありません．モデルがないと，数学の出番はないと言ってよいでしょう．現象数理科学は，存在しているモデルを解析するという数学的興味だけではなくて，現象の解明に興味を持ち，それができるか，そのための数理的方法があるのか等を解決することです．特に重要なのは「現象を視る」というモデリングという作業です．これは以後の研究を左右すると言っても過言ではありません．これが成功すると，第2の作業は「解析する」ことです．そのためには厳密な手法だけでは十分ではなく，それを相補するシミュレーション解析，可視化等の手法が必要となります．このように，現象数理科学では，実験，モデリング，解析，シミュレーション等の分野の専門家達の共同作業が要求されるのです．この特集号に参加して頂いた著者達は，現象数理科学の分野で活躍されている研究者です．

手老氏達の「アメーバの迷路解き」は実験家と，モデリングのエキスパートの共同研究の結果生まれたのです．アメーバの運動を，モデルを通して「視る」ことに成功し，その機能解明に数理から挑戦したものです．その結果，最短経路問題に対してアメーバから学んだ新しい方法を提案すると共にロードナビゲーションという実学的な問題を紹介しています．長山氏の「樟脳船の運動」もやはり実験家との出会いによって生まれました．樟脳片を船型のプラスチック板の後方につけて水に浮かべると，それが溶けることによって，あたかもエンジンを持った船のように水面上を走る運動は古くから知られていたのですが，同氏は樟脳船モデルを作り，計算機シミュレーションからその機構解明に接近しています．牛島，矢崎両氏の「泡の動き」もやはり実験家から刺激を受けて進めてきた仕事の紹介です．泡は日常的に観察されるものですが，「泡の科学」はまだ完全に明らかにされていないようです．彼らの研究は，容器内の液体中にある泡が上昇するとき，その形状や動きが泡の大きさや液体の物性に依存して様々に変化するという実験を知ったときから始まりました．泡の

もつ不思議さが読者に伝わってくるものと思われます．小川氏の「振動から時空間パターンへ」は一見現象とは無関係のようなタイトルですが，この研究は，ある電気化学系に現れる不思議な振動現象を発見した実験家からその理由を尋ねられたことが発端のようです．同氏は，それに答えるために現象の本質だけを抽出したミニマルモデルを導出し，その解析を通じて不思議な振動現象の正体を明らかにしました．小林氏の「波を視る」は我々に最も身近な現象の一つでしょう．様々な形の波を見て，それらの記述，仕組みを理解したいという人は昔から数多くいました．しかしながら，まだ充分には理解されていないようです．同氏は水面重力波に注目し，1921 年 Nekrasov によって見つけられたモデル方程式がいかに解析されるかをわかりやすく説明しています．このモデルは 85 年ほど前に世に現れた古い積分方程式ですが，まだ完全には解かれていなかったのです．同氏は，近似解としての数値解を見せるだけではなく，厳密な解析法として使用できる「精度保証付き数値計算法」を展開することからこれまで未解決問題を解明することに成功しています．この成果は現象解明，数値計算法，厳密な解析がうまく融合した例の一つでしょう．細野氏の「感染症の伝播を視る」はこれまで人類に大きな惨禍を与えた天然痘やペスト等の伝染病の発生と伝播をモデルから理解しようというものです．感染症の発生，伝播，消滅等の予測は我々人類にとって深刻な問題ですが，時間空間スケールが大きくて，実験からの考察は不可能であることから，理論的研究が期待されている分野です．昌子，太田両氏の「3 次元チューリングパターン」の研究は生体の微細構造からそれを形成するメカニズムを探ることが動機となっています．「3 次元構造には 2 次元構造から予想できないような新しい構造が存在するのだろうか？」という問いに対して，チューリングパターンを発生する反応拡散系の 3 次元問題を取り上げ，その数値シミュレーション，そこに現れる 3 次元構造の可視化そして安定性解析等から 3 次元構造特有のパターンを紹介しています．上山氏の「複雑な解構造を視る」はこれまでのモデリングとは視点が異なり，複雑なパターン形成はどのように理解できるかという内容です．出現するスポットが自己複製的な分裂を繰り返しながら，やがて多くのスポットが空間全体を覆い尽くすというパターン形成を発生する反応拡散系を取り上げ，「このような自己複製パターンはどのように形成されるのだろうか？」という問題を考察しています．同氏は AUTO と呼ばれる数値計算ソフトウェアを駆使することから，この問題に答えています．ここで注目すべきことは，厳密な解析法ではその解決が到底不可能であると思われた問題を計算機解析法が見事に解決したことでしょう．このような手法は現象数理科学において注目されている解析法の一つです．

2 つのトピックスがコラムという形で紹介されています．草野氏達の「オーロラをコンピュータの中で作ろう」は自然界における複雑現象の一つであるオーロラを異なる階層のモデルを連結することから，シミュレーション及び高度な可視化法を駆使することからコンピュータの中で再現することを可能にしました．著者達はシミュレーション科学の専門家であり，この他にも，ミクロスケールからマクロスケールまでの相互関連に係る複雑な現象の解明にもチャレンジしています．最後に，私の拙文「バクテリアコロニーパターン」です．バクテリアは環境条件の変化に応じて多様で複雑なコロニー形状を呈することは実験からよく知られていますが，その理由が，遺伝子制御によるのか，自己組織化によるものなのかという問題に答えるために，モデルを導出し，解析，シミュレーションから後者の場合にそれが可能であることを示しています．

最後になりましたが，「現象数理科学」という言葉は新しく作った造語であり，更に対象とする現象は実に多種多様です．したがってそれを一言で集約するならば，やはり「現象を視る」ということになるでしょう．今回の特集号によって，読者の皆様に現象数理科学という言葉を覚えて頂き，興味をもって頂ければ，嬉しい限りです．

（みむら・まさやす，明治大学理工学部）

アメーバの迷路解きに学ぼう

手老 篤史・小林 亮・中垣 俊之

1. 迷路について

皆さんは遊園地のアトラクションなどの巨大迷路で遊んだ経験はあるでしょうか？ 遊んだことがある方はおわかりだと思いますが，自分の周りの情報しか持たない状態でゴールまで辿り着くのは結構大変なことです．さらに，ゴールまでのルートが2つ以上あった場合に，1番良いルート選択をするのはもっと難しいと思います．

さて，このような難しい問題を「単細胞」な生き物がいとも簡単に解いていると聞いたら皆さんは驚くでしょうか？ ここでは真正粘菌モジホコリの変形体（以下，粘菌）を取り扱います．この粘菌はナイフなどで2つに切ればそのそれぞれが1個体として生活することができ，逆に2つの個体が接触すると1つの粘菌に融合してしまうという性質があります．また，この粘菌は多核単細胞生物であり，栄養分を輸送するための輸送ネットワークは持ちますが，脳のような情報処理器官を持たない単純な生物です．このように単純な構造であることから，粘菌は自分が接触していない離れた場所の情報は得ることができません．ですが，この生物が迷路を解くという実験結果があります[1)*1)]．

最初に図1(a)のように粘菌を迷路に敷き詰め，スタートとゴールを決めます（図の「S」と「G」）．ここで，スタートからゴールへの行き方はいくつかありますが，α_2, β_1 を通るルートが最短経路となります．次にスタートとゴールの場所に餌（AG）を置くと，図1(b)のように粘菌は行き止まりから撤退し，餌に集まります．最終的には図1(c)のように2点間を結ぶ最短経路上にのみ管状の構造を持ったネットワークを残します．

さて，この実験からわかるように，粘菌には迷路を最短経路で解く能力があるようです．ですが脳のような情報処理器官もなく，遠くの情報も得られない粘菌がなぜ解くのに全体の情報が必要そ

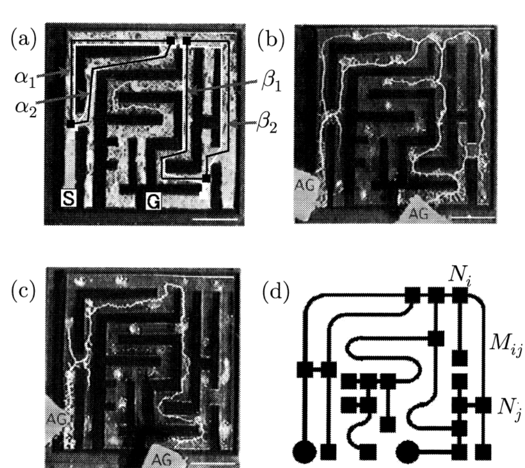


図1 (a)–(c) は粘菌が迷路を解く過程です．(d) はこの実験の迷路の形を表現したものです．●は餌を置く点（ノード）であり，迷路のスタート N_1 およびゴール N_2 を表しています．それ以外の行き止まりや交差点は■で表しています．

*1) 実際の粘菌ではまれに間違えて長い経路が残る場合や両方の管が残ったり管が完全に切れてしまう場合もあります[4)]．

うな最短経路問題を解くことができるのでしょうか？ ここではそのメカニズムを説明していきたいと思います．また，その結果得られた手法は新しい迷路解きの手法となっています．

2. モデル方程式

粘菌の動きを再現するためにモデル方程式を作ります．モデル方程式とは対象の重要な性質のみをピックアップし，数式の形で簡潔に表したものです．

この実験で注目すべき重要な粘菌の性質は2つあります．一つはスタートとゴールの間を原形質が流動しているということです．餌の周りに集まった粘菌のアクチン・ミオシン繊維が約2分周期で収縮弛緩運動を行うことによって，原形質が管の中に押し込まれ，スタートとゴールの間を往復流動します．もう一つの性質は使われている管ほど太くなるということです．管の中を原形質が流れると，管の壁と原形質の間にずり応力が発生し，その力が管を太く成長させます．反対に内部を原形質が流動していない管は細くなっていき，最終的には消えてしまいます．これらの性質から粘菌の管ネットワークを再現するためのモデル方程式を2つの部分から構成しました．一つは管内を流れる原形質の流動を表した方程式であり，もう一つは管の太さの変化を表す方程式です[*2)]．

2.1 迷路の表し方

ここでは図1(d)のように迷路を離散グラフで表現します．そして餌を置く場所に対応する2つのノードを N_1 と N_2 と番号付け，他のノードは $N_3, N_4, N_5, \cdots$ とそれぞれ番号付けます．N_i と N_j の間のエッジを M_{ij} と呼びます．各ノード N_i は1つのパラメータ $p_i(t)$ を持っています．これは管の壁が管内の原形質を押す圧力を表します．各エッジ M_{ij} は3つのパラメータ L_{ij}, $D_{ij}(t)$, $Q_{ij}(t)$ を持ちます．L_{ij} は管の長さを表し，D_{ij} は管の太さです．太い管はより多くの原形質を流動させるため，D_{ij} は管の伝導率（中をどれくらい原形質が流れやすいか）にもなっています．Q_{ij} は管内を流れる原形質の流量を表します．

2.2 原形質流動の方程式

管内の原形質流動をポワズイユ流で近似することにより，電気回路におけるオームの法則($I = E/R$)の式と同じように次の方程式が成り立ちます．

$$Q_{ij} = \frac{D_{ij}}{L_{ij}}(p_i - p_j).$$

この式は管内の原形質流動は管の伝導率(太さ)と圧力差に比例し，長さに反比例するという意味です．また，各ノードに流れ込んだ原形質の量と流れ出る原形質の量は釣り合っているということから，電気回路におけるキルヒホッフの法則が成り立ちます．

$$\sum_i Q_{ij} = 0 \quad (j \neq 1, 2).$$

また，実際の粘菌では餌の周りのアクチン・ミオシン繊維は，約2分の周期の周期的な収縮弛緩運動を行います．この収縮弛緩運動は原形質に圧力をかけ，それによりゾルは管の中に流れ込み，管を通ってもう一方の端から流れ出ます．そのため管の中の原形質流動は往復流動しています．ですが，往復流動の周期（約2分）は管の成長のタイムスケール（約1時間）に比べて短いので，ここでは一方向の定常流とみなすことができます．

$$\sum_i Q_{i1} + I_0 = 0, \quad \sum_i Q_{i2} - I_0 = 0.$$

ここで I_0 は定数です．

2.3 管の成長の方程式

次に管の太さの変化について考えます．粘菌において流量の多い管は成長するのに対し，流量のない管は減衰，消滅するので，管の成長方程式を

*2) ここで紹介するモデル方程式は電気回路の問題であるとみなせます．迷路の通路を抵抗とみなし，スタートとゴールには電源が繋がっていると考えます．そしてスタートからゴールまで一定の電流を流し，電流が多く流れた経路の抵抗を下げることによって電流をより流れやすくします．すると，迷路の行き止まりや遠回りの経路は電流が流れづらく，抵抗が上がり，最終的には抵抗が無限大になる（管が消失する）という結果が得られます．そのため変数 p_i,L_{ij}/D_{ij},Q_{ij} はそれぞれ電圧，抵抗，電流に対応しています．以上のことを念頭におくとここでの話は理解しやすいと思います．

次のようにおきます．

$$\frac{d}{dt}D_{ij} = |Q_{ij}| - rD_{ij}. \qquad (1)$$

この方程式では D_{ij} の値は $|Q_{ij}|/r$ に近づきます．すなわち内部を流れる原形質の流量 $|Q_{ij}|$ が大きければそれだけ管の太さ D_{ij} は大きくなりますし，$|Q_{ij}| = 0$ の場合は $D_{ij} \to 0$ となり，管は消失します．次節ではいろいろな迷路でのシミュレーション結果を紹介します．

3. シミュレーション結果

3.1 行き止まりについて

迷路を解く実験では，最初に行き止まりの経路上の管が消滅します．この性質をより詳しく考察するために，図 2 に示されるような実験を行いました．この実験は最初に T 字型容器上に粘菌が満たされている状態で，2 点に餌を置くと（図 2 (a)），最終的には行き止まりの部分の管が消滅するという結果になりました（図 2 (b)）．私たちは，この実験の結果を再現するために図 2 (c) のグラフを使用しました．この場合は I_0 の値に関わらず $Q_{13} = Q_{32} = I_0, Q_{34} = 0$ になります．したがって，D_{34} は指数関数的に 0 に収束します．このことから，行き止まりの経路上の管は原形質流動を持たないので，最終的には管が消滅することがわかります．このことは一般的なグラフであっても成り立ちます．

3.2 遠回りのルートについて

次に餌間の経路が 2 つ以上ある場合について考えます．そのための単純な例として図 3 のようなリング型容器を用いた場合について考えます．ここでは同じ組のノードを 2 本のエッジが繋いでいるため，エッジを図 3 (c) のように M_a, M_b と番号付けします．そしてこれらの M_a, M_b それぞれに長さ L，流量 Q，太さ D が与えられます．

$L_a = L_b$ の場合と $L_a \neq L_b$ の場合では結果が異なるので，それぞれの場合について説明します．

(i) $L_a \neq L_b$（対称性より $L_a < L_b$ を仮定）

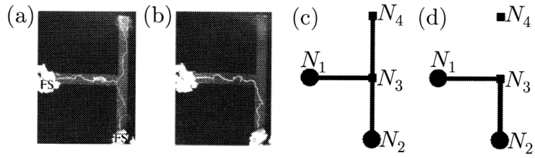


図 2 (a), (b) は T 字型容器を用いた実験の初期条件および最終状態を示します．(c), (d) は 4 つのノードおよび 3 つのエッジから成る離散グラフのシミュレーションの初期状態と最終状態をそれぞれ示します．黒線の幅は，各パスの伝導性 D を表します．最終的には $D_{34} \to 0$ になります．

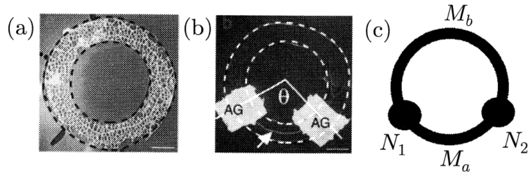


図 3 (a), (b) はリング型の実験の初期条件および最終状態を示します．対応する離散グラフは (c) で示されます．2 つのノード N_1, N_2 と 2 つのエッジ M_a, M_b から構成されています．この実験では，多くの場合において短い経路上の管が残りましたが，場合によっては長い経路上の管が残る場合や，両方の経路上の管が残ったり，管が全く残らない場合もありました．

図 4 (a) の中で示されるように 2 つの平衡点 A_a および A_b があります．A_a は安定で，初期状態に依存せず最終的には A_a に収束します．このことは短い経路上の管が初期状態に関わらず残ることを意味します．

(ii) $L_a = L_b$

この場合 2 点間の最短経路は複数（M_a と M_b の両方）あることになります．図 4 (b) はシミュレーションの結果を示します．この特別な場合では，灰色の直線の上の点はすべて安定平衡点です．最短経路が複数あるのでその両方の経路上の管が残っています．

3.3 迷路を解く実験の再現

前節でのシミュレーションより「行き止まりの管が消え」，「必ず短い経路上の管だけが残る」という結果になっていました．これらのことからこの

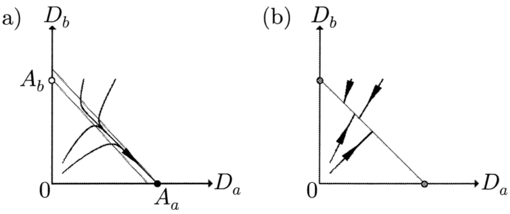


図 4　黒曲線は解軌道を示します．また，灰色の直線はヌルクラインです．黒丸は安定平衡点を白丸は不安定平衡点を示します．$L_a < L_b$ の場合，すべての軌道は平衡点 A_a に収束し，短いほうの経路上でのみ管が残ることがわかります (a)．$L_a = L_b$ の場合，最短経路はどちらの経路も最短経路なので，両方の経路上で管が残ります (b)．

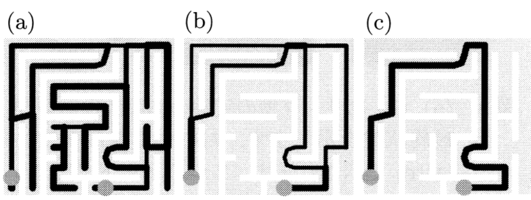


図 5　粘菌が迷路を解く実験のシミュレーション．(a) は初期状態．実際の粘菌と同じように（図 1 参照）まずは行き止まり上の管が消え (b)，最終的には最短経路上の管のみが残っています (c)．

方程式は一般の迷路に対して最短経路を発見する手法になっていると予想することができます．この予想に基づいてシミュレーションを行った結果，実際に様々な迷路に対しての最短経路が正確に求まっていました[2]．ここでは最短経路を求めるシミュレーション結果の一例として，迷路を解く実験のシミュレーションを紹介します．図 5 に示されたとおり，まず行き止まりの経路上の管が消え，最後には最短経路上の管のみが残っています．

3.4 ロードナビゲーションへの応用例

実用的な最短経路問題の例として，ロードナビゲーションシステムへ応用した結果を紹介します（図 6 参照）[2]．

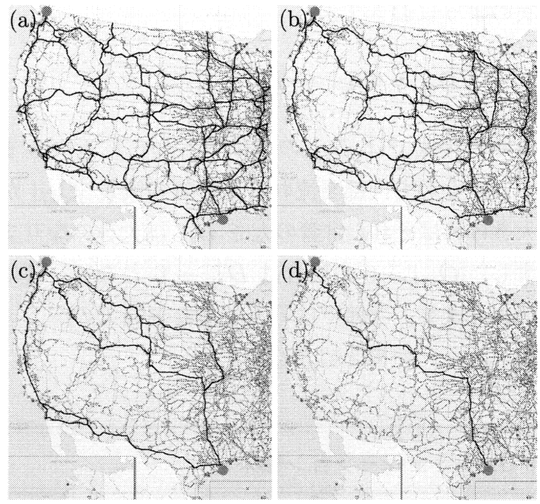


図 6　アメリカの高速道路網におけるロードナビゲーションシステムとして利用した応用例．シアトルからヒューストンへの最短経路が求まっています．また，途中経過 (c) の状態では海沿いの道など少し遠回りの道が残っていることからユーザーが道選択をすることができます．

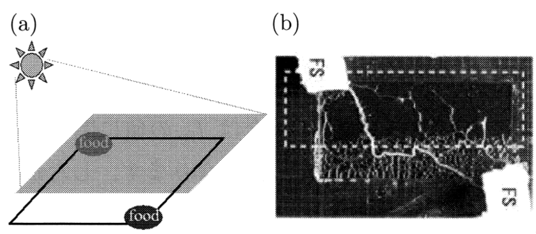


図 7　実験の模式図 (a) と実験結果 (b)．

4. 拡張：重み付きの最短経路問題

ここまでは距離だけを考えて，粘菌による 2 点間の最短経路を求める方法を考えてきました．次に重み付きの最短経路問題を考えてみたいと思います．例えば，その道が近道であっても歩きづらい場合は迂回したほうが良いこともあるでしょう．このようなときは歩きづらい道は通常の距離より何倍か長いとみなした上で最短経路を求めています．この「何倍か長い」というように長さに重みを付けたのが重み付きの最短経路問題です．

この実験では粘菌を長方形の容器の中に入れ，反対側の角に餌を置きます．通常ですと対角線が最短経路ですので，対角線上に管が残ります（図 8 (a)）．ですがここでは図 7 (a) のように容器の一部にだけ強い光を当てます．粘菌は強い光を嫌うため，

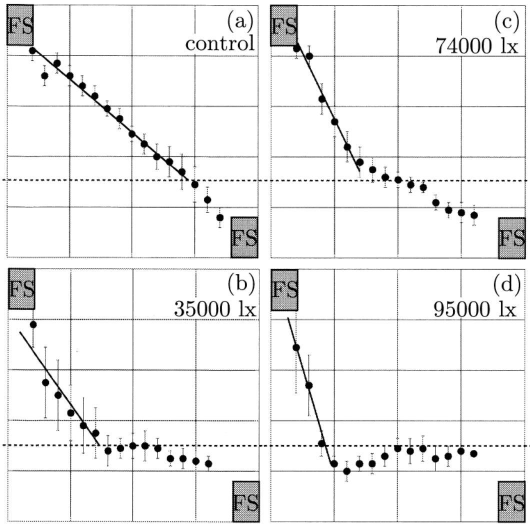


図 8　光を当てた実験の結果．光を強くするに従って迂回する割合が大きくなっている．

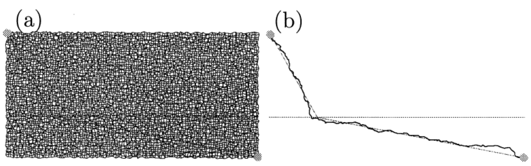


図 9　シミュレーションの初期状態 (a) と最終状態 (b)．ランダムにノードを配置した離散グラフを用いてシミュレーションを行っている．上の領域は $r = 3$，下の領域は $r = 1$ にしている．最終的には上の領域の長さを 3 倍と見積もった重み付きの最短経路が残る．

明るい場所では管を素早く減衰させます．その結果，図 7 (b) のように明るい部分に作る管の長さを短くしたがります．さらに光の強さを 35000 ルクス（図 8 (b)），74000 ルクス（図 8 (c)），95000 ルクス（図 8 (d)）（ルクス（lx）は光の強さの単位）と大きくしていくと迂回する度合いが大きくなります．これは粘菌が光の当たっている部分の長さを何倍かに重みを付けたと見ることができます．これを再現するために，管の成長方程式である式 (1) の管の減衰を表す係数を場所によって変えました．すると，この方程式は重み付きの最短経路上に正確に管を残すことが数値計算によりわかりました（図 9 参照）[5]．

5. まとめ

以上のことから，自分の周囲の情報しか持たない粘菌であっても全体の情報が必要な最短経路問題を解くことが可能であることがわかりました．また，この手法はネットワークの状態変化に強い最短経路問題の解法として多分野への応用が期待されています．

「単細胞」な粘菌ですが，意外に賢いのです．

参考文献

1) Nakagaki, T., Yamada, H., Tóth, A., 2000a. *Nature* **407**, 470.
2) Tero, A., Kobayashi, R., Nakagaki, T., 2007. *Physica A*, Volume **363**, Issue 1, (p.115–119).
3) Tero, A., Kobayashi, R., Nakagaki, T., 2007. *Journal of Theoretical Biology*, Volume **244**, Issue 4, (p.553–564).
4) Nakagaki, T., Saigusa, T., Tero, A., Kobayashi, R., 2007. Proceedings of "Topological Aspects of Critical Systems and Networks" (p.94–100).
5) Nakagaki, T., Iima, M., Ueda, T., Nishiura, Y., Saigusa, T., Tero, A., Kobayashi, R., and Showalter, K., 2007. *Phys. Rev. Lett.* **99**, 068104.

（てろう・あつし，北海道大学電子科学研究所）
（こばやし・りょう，広島大学大学院理学研究科）
（なかがき・としゆき，北海道大学電子科学研究所）

樟脳運動の数理モデル

樟脳船をコンピュータ内で動かそう

長山　雅晴

1. はじめに

皆さんは樟脳船という昔のオモチャをご存知でしょうか？「樟脳船」とは図1のようにプラスチック片の一部に防虫剤である樟脳片を付けたもので，水面に浮かべると水面をスイスイと動き回るオモチャです[1]．昭和40年代くらいまでは縁日の出店でよく見かけたそうですが，私は生まれたばかりだったので，共同研究者の中田聡先生（奈良教育大学）に教えてもらうまで知りませんでした[*1]．何事も見てみないことにはわかりませんから，樟脳船を作ってみましょう！樟脳船を作ることはとても簡単です．図1のような形にOHPシートを切って，その一部にボンド（Gクリアー）を使って樟脳酸粒子を付着します．その樟脳船を水面に浮かべて見ましょう．樟脳船が自発的に動き回ることが見て取れます（図2）．樟脳船は何故自発的に動き回るのでしょうか？この疑問は今から100年以上も昔，1890年イギリスの物理学者レイリー卿によって解決されていました．レイリー卿は，樟脳酸粒子の自発的運動を界面科学の視点から研究し，樟脳酸粒子の運動が自らが生じる表面張力差を駆動力として運動することを報告しました．

すなわち，樟脳酸粒子から水面に樟脳膜が展開されることによって表面張力が下がり，揺らぎによって樟脳酸粒子の周りで樟脳膜が不均一になった結果として表面張力差が生まれ，その表面張力差によって樟脳酸粒子が動くのです[2]．従って，樟脳船は船尾にある樟脳酸粒子から水面に樟脳膜が展開されることによって船首と船尾に生じる表面張力の差を駆動力として動いていることがわかります．それならば自発的運動は表面張力を変化させることができる（界面活性物質が含まれている）物質だったら何でも生じると思いませんか？実験をしているとわかりますが，樟脳はかなり強烈な匂いがします[*2]．そこで匂いがあまりしない物質はないかと考え，樟脳酸粒子の代わりに身近にある石鹸や液体洗剤を使うことにしました（石鹸船と呼びましょう）．ところが，この石鹸船を水面に置くと短時間は自発的に動くのですが，樟脳船と同じように長時間動き続けてはくれません．何故でしょう

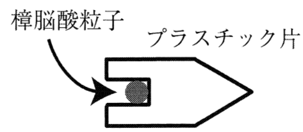


図1　樟脳船模式図.

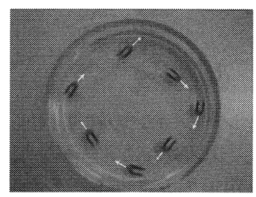


図2　シャーレの中で自発的に動き回る樟脳船.

*1）　50歳代の人は知っているそうですが，40歳代以下の人はほとんど知らないようです．

*2）　防虫効果があるから当り前なのですが．実験をしていると害虫の気持ちがわかります．

か．樟脳分子と石鹸分子の大きな違いは空気中に分子が昇華するかしないかです．樟脳分子は常温で空気中にどんどん昇華しますが，石鹸分子はほとんど昇華しません．昇華する効果の違いで自発運動する時間が変わってくるものなのでしょうか？

ここから先は実際の実験ではなく，樟脳運動の数理モデルを構成し，数理モデルの数値実験（仮想実験）から樟脳運動を観察していきましょう．

2. 樟脳酸粒子と樟脳船の数理モデル

樟脳船の数理モデルを記述する前に，樟脳運動モデルの構成方法をわかりやすくするために，円盤樟脳酸粒子の運動に対する数理モデルを記述してみましょう．前節でも解説したように，樟脳酸粒子は樟脳酸粒子自身から展開される樟脳膜による表面張力不均一性が駆動力となって運動するのですから，数理モデルの主人公は樟脳酸粒子と水面上に展開される樟脳膜濃度ですよね！ したがって，樟脳酸粒子と樟脳膜の振舞いを記述する方程式を作ることにします．最初に，樟脳酸粒子の運動方程式を構成するために，図 3 のように非常に薄い円盤樟脳を質点近似することにします．このとき樟脳酸粒子の運動方程式は

$$\rho \ddot{\boldsymbol{x}}_c(t) = \nabla \gamma(u(t, \boldsymbol{x}_c(t))) - \mu \dot{\boldsymbol{x}}_c(t) \qquad (1)$$

となります[3)]．ただし，$\boldsymbol{x}_c(t) (= (x_c(t), y_c(t)))$ は樟脳酸粒子の位置，$u(t, \boldsymbol{x})$ は水面上での樟脳膜濃度を表し，ρ, μ は正定数で，それぞれ面密度 (kg/m^2)，粘性抵抗です．$\gamma(u)$ は表面張力（N/m）であり，樟脳膜の濃度に依存して樟脳膜濃度が高いほど表面張力が低下することから単調減少関数とします．特にここでは

$$\gamma(u) = \frac{\gamma_0 - \gamma_1}{1 + a u^m} + \gamma_1 \qquad (2)$$

としましょう．ここで，γ_0 は水の表面張力，γ_1 は飽和表面張力，a は正定数とします．樟脳膜濃度

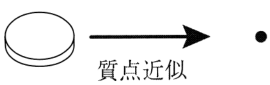


図 3 円盤樟脳を質点 $\boldsymbol{x}_c(t)$ によって近似．

のモデル方程式として，樟脳酸粒子が水面上に展開する現象を線形拡散で表現し，次のような反応拡散方程式で記述します：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_u \Delta u - k_1 u + F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_c(t); r_0). \quad (3)$$

ここで，$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$，右辺第一項は拡散項，第二項は樟脳酸粒子の昇華を表す項であり，第三項は円盤樟脳から樟脳膜が水面に供給する項を表しており，

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_c; r_0) = \begin{cases} k_2(u_0 - u), & |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_c(t)| \le r_0, \\ 0, & |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_c(t)| > r_0 \end{cases} \qquad (4)$$

とします．ただし，D_u, k_1, k_2, u_0, r_0 はそれぞれ拡散係数，昇華率，溶解速度，飽和樟脳膜濃度，樟脳酸粒子半径[*3)]を表す正定数とします．最後に樟脳酸粒子の運動モデル (1)–(4) の解が一意であるために $u(t, \cdot) \in C^1$ とします．樟脳酸粒子の数理モデルを詳しく解析することも興味深いことでありますが，今回は割愛することにします．数理モデルの導出等を詳しく知りたい方は参考文献 3, 6) を見てください．

次に，樟脳酸粒子の運動方程式 (1) をもとにして樟脳船の運動方程式を構成します．樟脳船の運動を数式で表現するために 2 質点

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_1(t) = (x_c(t) + l\cos\theta(t), y_c(t) + l\sin\theta(t)), \\ \boldsymbol{x}_2(t) = (x_c(t) - l\cos\theta(t), y_c(t) - l\sin\theta(t)) \end{cases} \qquad (5)$$

を使って，図 4 のように樟脳船を線分によって剛体近似します．ここで，$\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t)$ はそれぞれ樟脳船の船首，船尾を表しており，$\boldsymbol{x}_c(t) (= (x_c(t), y_c(t))$ は船の中心（慣性中心点とする）を表しています．また，$\theta(t)$ は船が x 軸となす角度，$2l$ は船の全長とします．このとき樟脳船のモデル方程式は次のように並進運動と回転運動に対する運動方程式を用いて記述できます：

*3) 樟脳酸粒子を質点で近似したために粒子半径を表現できなくなりましたが，樟脳膜を供給する項に樟脳酸粒子の半径を与えて樟脳酸粒子の大きさを表現することにしました．

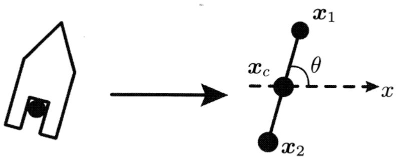


図 4　樟脳船の線分による剛体近似.

$$
\begin{cases}
\rho \ddot{\boldsymbol{x}}_c = \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{i=1}^{2} \nabla \gamma(u(t, \boldsymbol{x}_i)) - \mu \dot{\boldsymbol{x}}_c, \\
I_G \ddot{\theta} = \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{i=1}^{2} ((\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_c) \times \nabla \gamma(u(t, \boldsymbol{x}_i))) - I_\theta \dot{\theta}.
\end{cases}
\tag{6}
$$

ただし，I_G は慣性モーメント，I_θ は回転運動に対する粘性抵抗を表す正定数です．樟脳膜のモデル方程式は (3) とほとんど同じですが，樟脳船モデルでは樟脳酸粒子が船尾に付いているので，樟脳膜の供給項 (4) を

$$
F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_2; r_0) = \begin{cases} k_2(u_0 - u), & |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_2(t)| \leq r_0, \\ 0, & |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_2(t)| > r_0 \end{cases} \tag{7}
$$

のように $\boldsymbol{x}_2(t)$ から樟脳膜が供給されるように変更します．これで樟脳船運動の数理モデル (3), (6), (7) ができました．さて，数理モデルが樟脳船の運動を再現しているかどうか数値計算によって確認してみましょう*4)．計算領域 Ω は簡単のため $(0, 10) \times (0, 10)$ とし，境界条件として斉次ノイマン条件を課し，初期条件は $u(0, x) \equiv 0.0, \boldsymbol{x}_c(0) = \boldsymbol{x}_0 \in \Omega, \dot{\boldsymbol{x}}_c(0) = 0.0$ を与えます．数値計算を行った結果，図 5 のように樟脳船が自発的に動き回る現象が再現できました．それでは，最初の疑問に戻って石鹸船が動かなくなる原因を数理モデルを用いて調べてみましょう．石鹸分子は昇華しないので方程式 (3) において $k_1 = 0.0$ とおきます．すると図 6 のように船は徐々に動かなくなりました．このとき，$u(t, x)$ の数値データを gnuplot で可視化すれば石鹸膜は水面全体に展開されていることがわかります（空間一様解になっているので図は省略）．シャーレの中のような狭い場所において樟脳船のように長時間動き続けるためには，昇華することによって水面全体に分子が展開されないことが重要だとわかりました．池のような十分広い場所ならば，きっと石鹸船も長時間動き続けてくれるのでしょう！（本当なのかなぁ (^_^;))

*4)　数値計算を行う前に数理モデルの無次元化を行いますが，ここでは省略します．

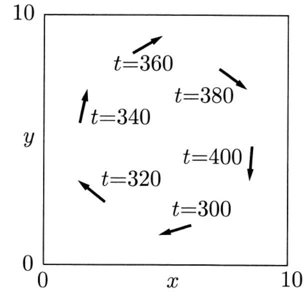


図 5　樟脳船モデルにおける数値計算結果, 矢印は船首を表している．パラメータは以下の通り：$\rho = 1.0$, $\mu = 0.2$, $I_G = 1.0$, $I_\theta = 0.02$, $D_u = 1.0$, $k_1 = 0.1$, $k_2 = 1.0$, $u_0 = 1.0$, $r_0 = 0.2$, $l = 0.5$, $\gamma_0 = 1.0$, $\gamma_1 = 0.0$, $a = 2.0$, $m = 1.0$.

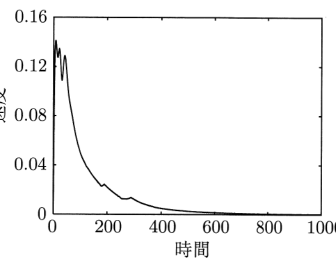


図 6　石鹸船モデルにおける数値計算結果．縦軸は石鹸船の並進速度と回転速度を合わせた速度 $\left(\sqrt{\dot{x}_c^2(t) + \dot{y}_c^2(t) + \dot{\theta}^2(t)}\right)$ です．パラメータは $k_1 = 0.0$ 以外を除いて図 5 と同じです．

3. 化学反応を伴う樟脳酸粒子船の運動

この節では化学反応を伴う樟脳船（実際は樟脳酸船）運動の数理モデルについて解説します．奈良教育大学の中田聡先生らは，樟脳の誘導体である樟脳酸粒子を船尾に付着した樟脳酸船を作り，リン酸水素イオン水溶液上での樟脳酸船の運動を考察し，リン酸水素イオン濃度に依存して樟脳酸船の速度が周期的に変動する現象を発見しました[4]．初期のリン酸水素イオン濃度がゼロのとき，樟脳酸船は等速運動します（図 7(a)）が，リン酸の初

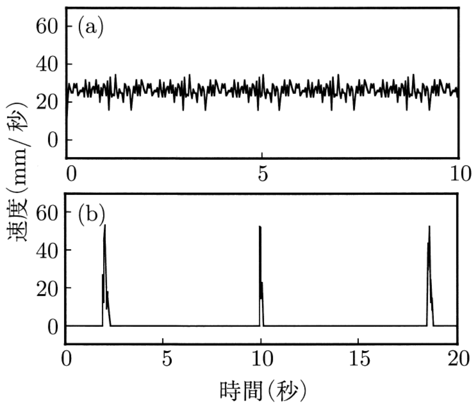


図 7 リン酸水素イオン水溶液上での樟脳酸船の速度の時間変化 ((a) 純水, (b) リン酸水素イオン水溶液).

期濃度を高くすると，樟脳酸船は間欠運動を起こします（図 7(b)）. 樟脳酸粒子はリン酸水素イオンと水面で化学反応（この場合は中和反応）を起こしイオン化することで溶液中に溶け込みます．その結果，水面に膜を展開できなくなるために，表面張力の変化がなくなり樟脳酸船は停止し，しばらくして水面近くのリン酸水素イオンが少なくなれば樟脳酸膜を展開できるようになるために表面張力差が生じて動くのではないかと予想ができます．本当に化学反応さえ起こせば間欠運動するのでしょうか？ すなわち，一般的に樟脳酸粒子と化学反応を起こす水溶液上に樟脳酸粒子を付着させた船（樟脳酸粒子船と呼びましょう）を浮かべると反応物質の濃度に依存して船が間欠運動をするのでしょうか？ この節では化学反応と結合した数理モデルを構成し，化学反応と間欠運動の関係を調べてみます．一般に 2 つの化学物質による化学反応に対する反応式は

$$n_1\mathrm{A} + n_2\mathrm{B} \xrightarrow{k} n_3\mathrm{C} + n_4\mathrm{D}$$

と書くことができます．中田先生らが実験で用いた化学反応では $n_1 = 1, n_2 = 2, n_3 = 1, n_4 = 2$ となります．樟脳酸粒子船の間欠運動を調べるために空間 1 次元の数理モデルを構成しましょう．最初に，樟脳酸膜の表面濃度 $u(t,x)$（反応物質 A に対応）と水溶液中の化学物質濃度 $v(t,x)$（反応物質 B に対応）に対するモデル方程式を考えます．実験から，「化学反応は水面近くでしか起こらない」,「生成された物質はイオン化して水溶液中に溶け込む」,「船の運動は水面上」であることを考慮し，水面での化学反応だけを考慮した反応拡散系

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = D_u \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - k_1 u - n_1 k_3 u^{n_1} v^{n_2} \\ \qquad + F(x, x_2(t); r_0), \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = D_v \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - n_2 k_3 u^{n_1} v^{n_2} \end{cases} \tag{8}$$

によって記述します．ここで，D_u は水面での樟脳酸膜濃度の拡散係数，D_v は溶液中でのリン酸水素イオン濃度の拡散係数，k_1 と k_3 はそれぞれ昇華率と反応率を表し，r_0 は樟脳酸粒子の半径を表します．ただし，樟脳酸膜の供給項 F は前節の樟脳船のモデルよりも単純化して

$$F(x, x_2; r_0) = \begin{cases} k_2 S, & |x - x_2| \le r_0, \\ 0, & |x - x_2| > r_0 \end{cases} \tag{9}$$

とします．ここで S は樟脳酸粒子の密度を表します．ここでは 1 次元区間での運動を考えるので，樟脳酸粒子船は 2 点 $(x_1(t), x_2(t)) = (x_c(t) + l, x_c(t) - l)$ を結ぶ線分で近似し，樟脳酸粒子船の運動方程式は (6) より

$$\rho \ddot{x}_c(t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x}\gamma(u(t, x_i(t))) - \mu \dot{x}_c(t) \tag{10}$$

と書くことができます．ここで，表面張力 $\gamma(u)$ は (3) の関数型を用います．水溶液中の反応物質の初期濃度に依存した樟脳酸粒子船の運動を調べるために，初期条件として

$$\begin{cases} u(0,x) \equiv 0, & v(0,x) = v_0, \\ x_c(0) = x_0, & \dot{x}_c(0) = 0 \end{cases} \tag{11}$$

を与えます．ここで v_0 は水溶液中の反応物質の初期濃度，x_0 は樟脳酸粒子船の初期位置を表します．最後に，樟脳船の数理モデルと同様に解が一意であるために $u(t,\cdot) \in C^1$ の条件を課します．

通常，数値計算を行う前に (8)–(11) に対して無次元化を行いますが，本稿では無次元化されたモデル方程式を提示しないので，モデル方程式 (8)–(11) をそのまま数値計算します．無次元化された

数理モデルについては参考文献5) を参照してください．計算区間は $(0, L)$ とし，境界条件は斉次ノイマン条件を課します．

まず最初に，数理モデル (8)–(11) が樟脳酸船の運動を再現できるか試してみましょう．そのために $n_1 = 1, n_2 = 2$ とします．そして，v_0 を自由パラメータとし，他のパラメータを固定して数値計算を行います．ただし，樟脳酸粒子の表面拡散は水溶液中のイオン拡散と比較して非常に速いので，$D_v \ll D_u$ と仮定します．

数理モデル (8)–(11) の数値計算により次の結果が得られました：v_0 が小さいとき ($v_0 = 1.0$) は樟脳酸船が等速運動する（図 8 (a)）．v_0 を大きくすると ($v_0 = 50.0$)，船の速度は周期的に振動します（図 8 (b)）．この結果は，v_0 を大きくすると樟脳酸船の運動はホップ分岐によって等速運動から周期振動運動に変化することを示唆しています．さらに v_0 を大きくすると ($v_0 = 300.0$)，樟脳酸船の運動は周期間欠運動となります（図 8 (c)）．間欠運動は等速運動から分岐した周期振動の一部であることがわかりました．これにより数理モデルは樟脳酸船の運動を定性的に再現できたと考えてよいでしょう．さらに，この数値計算において $D_v \ll D_u$ の条件を満たさなければ，振動現象は出現しないことがわかりました．これらの数値計算結果を整理すると，間欠現象が出現するには，水溶液中のリン酸水素イオン濃度に加えて，樟脳酸膜とリン酸水素イオンの拡散係数の比が本質的要因であることが示唆されました[5]．

それでは，一般の化学反応系における樟脳酸粒子船の運動を数値実験から予測してみましょう．そのために $v_0 = 100.0$ と固定し，反応次数 n_1, n_2 を自由パラメータとして数値計算を行いました．その結果が図 9 であり，反応次数に依存して振動現象が起こる場合と起こらない場合があることがわかりました．この計算結果は，化学反応が起因となって生じる間欠運動に対しては反応次数が本質的要因の一つになっていることを示唆しています．では実際の実験ではどうなのでしょうか？ 樟脳の誘導体でリン酸との反応次数が $n_1 = 1, n_2 = 1$ となる樟脳酸—リン酸系の化学反応系があります．この樟脳酸—リン酸反応系においてリン酸濃度を高くしても樟脳酸船は振動運動を起こさないことが実験で確かめられました．このように数理モデルの結果から予測された現象が実験でも再現できたことは，この樟脳酸粒子船の数理モデルが実験を “定性的な予測ができる程度に” 近似していると言えるでしょう．

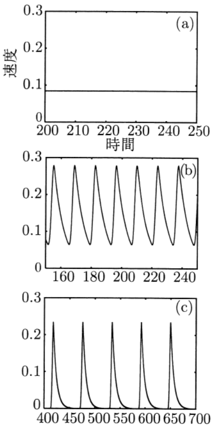


図 8　リン酸水素イオン濃度に依存した樟脳酸船の中心点 $x_c(t)$ の速度変化：(a) 等速運動 ($v_0 = 1.0$); (b) 周期振動運動 ($v_0 = 50.0$); (c) 周期間欠運動 ($v_0 = 300.0$)．パラメータは次の通りである：$\rho = 1.0$, $\mu = 0.1$, $\gamma_0 = 1.2$, $\gamma_1 = 0.2$, $l = 1.0$, $D_u = 1.0$, $D_v = 0.000001$, $k_1 = 2.0$, $k_2 = 3.0$, $k_3 = 1.0$, $S_0 = 1.0$, $a = 2.0$, $m = 3$, $r_0 = 0.7$.

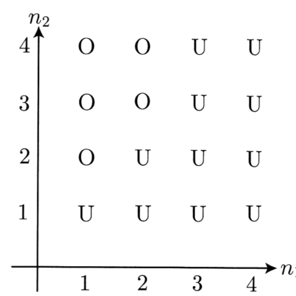


図 9　(n_1, n_2) を自由パラメータとしたときの $x_c(t)$ の運動：U：等速運動，O：振動運動．パラメータは以下のとおりである：$\rho = 1.0$, $\mu = 0.2$, $\gamma_0 = 2.2$, $\gamma_1 = 0.2$, $l = 1.0$, $D_u = 1.0$, $D_v = 0.000001$, $k_1 = 3.0$, $k_2 = 2.0$, $k_3 = 1.0$, $S_0 = 1.0$, $a = 2.0$, $m = 3$, $r_0 = 0.8$.

4. おわりに

樟脳酸粒子を質点として近似することによって，樟脳酸粒子の自発的運動機構を表現する簡単な数理モデルを構成しました．また，数値計算によって化学反応を伴う樟脳酸粒子船の間欠運動機構の本質的要因に反応次数があることを示唆することができました．今回提案した数理モデルは簡単ですが，現象の本質を上手く取り出すことに成功した数理モデルの一つだと言えるでしょう．

数理モデルは作り手の視点によって様々だと思います．今回は粒子を質点で表現しましたが，粒子をフェーズフィールド方程式で表現した数理モデルもありますし，もっと異なる視点から粒子を表現する方法もあるはずです．同じ現象であっても数理モデルは異なってよいと思います．実際の現象は対流現象も絡むので，流体方程式と結合した数理モデルが必要だと考える人もいるでしょう．どのような現象をどのような立場から視たいのかによって，作られる数理モデルは異なると思います．

最後に，本稿の内容は奈良教育大学の中田聡准教授との共同研究の成果の一部であり，中田先生との出会いがなければ樟脳船の数理モデル化を行うことはなかったと思います．ここに深く感謝いたします．

参考文献

1) 戸田盛和，『おもちゃの科学 2』，日本評論社．
2) L. Rayleigh, *In Proc. R. Soc. London*, **47** (1890), 364.
3) Y. Hayashima, M. Nagayama and S. Nakata, *Journal of Physical Chemistry B* **105** (22) (2001), 5353–5357.
4) S. Nakata, Y. Hayashima, and T. Ishii, "Self-motion pf a camphoric acid boat as a function of pH of aqueous solutions", *Coll. Surf. A*, **182** (2001), 231–238.
5) Y. Hayashima, M. Nagayama, Y. Doi, S. Nakata, M. Kimura and M. Iida, *Phys. Chem. Chem. Phys.*, **4** (2002), 1386–1392.
6) M. Nagayama, S. Nakata, Y. Doi and Y. Hayashima, *Physica D* **194**, 151–165, 2004.

（ながやま・まさはる，金沢大学大学院自然科学研究科）

泡の動きを視る

牛島　健夫・矢崎　成俊

1. はじめに

泡は素晴らしい．麦酒を飲む度にそう思う．日本語では，色々な泡のことをみな一言で「あわ」と呼んでいるが，英語では，独立した気泡のことをバブル（bubble）と言い，気泡の集まりをフォーム（foam）と呼んで区別している．麦酒の中をふらふらと昇っていくバブルは何とも楽しいし，滑らかなフォームがもたらす味わいはまた格別である．麦酒のみならずバブルとフォームは，どちらも我々の生活を豊かにしてくれているのだ．バブルに魅了されるのは，何も酒飲みばかりではない．古くは，レオナルド・ダ・ヴィンチが，水中を螺旋状に上昇するバブルの様子を詳細に観察し，そのスケッチを残している[1]．以来，数多の研究が，液体中のバブルの運動について行われてきたが，水中を上昇する単一の気泡の挙動すら十分に理解されているとは言えないようだ[2]．液体と気体，気体と固体など異なる相が混在する流れを混相流と言うが，大気・海洋・宇宙・雪氷・粉体・結晶成長・血液など混相流の現れる場面は枚挙に暇がなく，その応用範囲は極めて広い．液体中を上昇するバブルは混相流の中でも基本的なものであり，その意味でも重要な問題だと言えよう．

本稿では，ヘレ–ショウ セルと呼ばれるある種の容器内の液体中を上昇する泡（バブル）に関する実験と，それに対する数値実験の試みを紹介しよう．我々がこの問題に関わるようになったのは，3年ほど前のとある研究集会での筆者の講演の直後に，三重大学工学部分子素材工学科の川口正美先生から「泡に興味はありますか？」と声をかけられたのがきっかけであった．ここで紹介する実験も，ここ数年来先生の研究室で行われてきたものである．以下では泡と言えば，バブル，特に単一の気泡のことを指すものとし，敬称は省略する．

2. ヘレ–ショウ セル中を上昇する泡

2.1 川口研究室の実験

ヘレ–ショウ セルとは，2枚の透明な平板を地面と平行に極僅かな隙間を空けて設置しその隙間を液体で満たしたものである．このようなセルを地面と垂直に立てて（図1），その中を上昇する気泡の挙動を観測するというのが，これから紹介する実験である．

川口研究室では，側面および底面を閉じ，上部は開放し，底面の中央に小さな穴を開けた，長さ $L = 25\,\mathrm{cm}$，幅 $W = 5\,\mathrm{cm}$，隙間 $h = 0.1$ (or

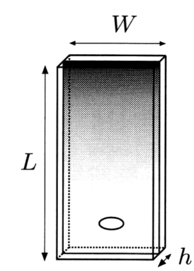


図1　長さ L，幅 W，隙間 h のヘレ–ショウ セル．

0.15) cm のアクリル製のセルを用いて実験を行っている．セルの中を液体で満たし，恒温槽の中に設置する．底面の穴から，一定量の空気を注入し，それによって生じる気泡の運動を CCD カメラで観測する．川口研究室では，液体として，種々の高分子溶液および脱イオン水（以下，水）を用いている．実験の主目的は，高分子溶液のレオロジー特性を明らかにし，それが気泡運動に与える影響を研究することであって，水中の気泡の実験は対照実験である．しかしここでは，水の場合の結果のみを記すことにする．実験の全容については川口らの論文[3,4]を参照されたい．観測により以下のような結果が得られている．

1. 気泡注入後，ある緩和時間の後に，気泡は等速で上昇するようになる．この上昇速度を終端速度と言う．気泡サイズが $0.3\,\mathrm{cm}^2$（レイノルズ数 Re がおよそ 1000）を超えるまでは，終端速度は気泡サイズに関して単調増大だが，これを超えるとサイズによらずほぼ一定である（図 2）．

2. 気泡の形状は，気泡のサイズによって変化する．気泡が小さい内は，形状はほぼ円だが，大きくなるに従って楕円に近い形となり，さらに大きくなるとくらげの頭のような形状となる（図 3）．

3. 気泡の軌道は，直線状のものとジグザグ状のものとがある（図 3）．ジグザグ状の軌道の気泡の伴流には，周期的な渦の発生が観測される（図 4）．同じジグザグ状の軌道でも，気泡サイズが $0.3\,\mathrm{cm}^2$ の前後では振動の様子が異なり，$0.3\,\mathrm{cm}^2$ より小さい場合はストローハル数 St はほぼ一定で 0.2 であり，それ以上だと気泡サイズに対して単調に増大する（図 5）．直線状の軌道が，この境目で観察される．

ここで，気泡サイズ S は CCD カメラで撮影した気泡画像の面積であり，レイノルズ数 Re は気泡の等価円直径 d，終端速度 V，水の密度 ρ，水の粘性率 μ を用いて $\mathrm{Re} = \rho d V/\mu$ と定める無次

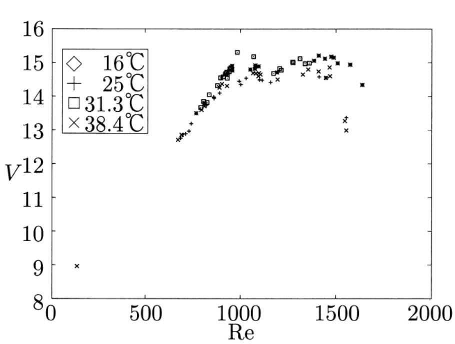


図 2　レイノルズ数 (Re) と終端速度 (V) の関係．元川口研の池田[7]の実験データより作成．



図 4　気泡の伴流の可視化．三宅[6]によるビデオより転載．左右のスケールは異なる．

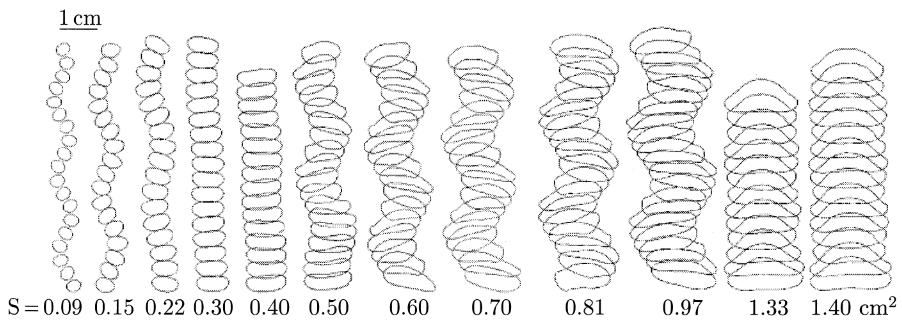


図 3　気泡形状・上昇様式の変化．1/30 秒間隔．郷[5]より転載．

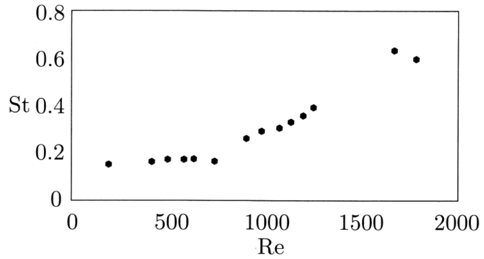


図 5　レイノルズ数（Re）とストローハル数（St）との関係．郷[5)]より転載．

元量で，流体の慣性力と粘性力との比を表している．レイノルズ数は気泡サイズに対して単調増大である．また，ストローハル数St は，気泡の軌道の振動数を f として，$\mathrm{St} = fd/V$ で定める無次元量で，流れの非定常性を表す．

川口の実験は，およそ300から1500くらいの比較的高いレイノルズ数の領域で行われており，直線状の軌道は稀で，主として振動しながら上昇する気泡が観測されるようである[7)]．

2.2 Kelley と Wu の実験

それでは，より小さなレイノルズ数領域ではどのようなことが起こっているのだろうか？ 気泡サイズを小さくすることで，レイノルズ数をコントロールするのは少々難しい．Kelley と Wu[8)]は，気泡サイズは一定に保ったまま，セルを傾けることで終端速度をコントロールして，少し小さなレイノルズ数領域（およそ100～300）での様子を観察した．それによると，1. 気泡形状は円形のままで変形は観察されない，2. レイノルズ数が小さいときには，気泡の軌道は直線状だが，大きくなるに連れて直線状の軌道が不安定化し，ジグザグ軌道のみが観察されるようになる，3. その不安定化の起こる臨界レイノルズ数は気泡サイズによって異なるが，気泡サイズが大きいほど臨界レイノルズ数も大きく，その値は110から170程度である，4. ジグザグ状の気泡の伴流には周期的な渦の発生が観測される．

3. 泡の挙動を記述する方程式系

我々の（まだ達成されていない）目標は，気泡の軌道および形状のレイノルズ数による変化の全容を数理的に理解することである．そのためには，まず，泡の挙動を数学的に記述する必要がある．流体がニュートン流体，非圧縮，等温的に変化すると仮定すれば，液相（$i=1$）および気相（$i=2$）はそれぞれ以下の連続方程式とナヴィエ・ストークス方程式で記述される[9)*1)]．

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v}_i = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_i \cdot \nabla)\boldsymbol{v}_i = -\frac{1}{\rho_i}\nabla p_i + \boldsymbol{F} + \nu_i \nabla^2 \boldsymbol{v}_i. \tag{2}$$

ここで，ρ_i は密度，ν_i は動粘度であり，未知関数 $\boldsymbol{v}_i, p_i$ は流体の速度および圧力，$\boldsymbol{F}$ は重力などの外力である．添え字 i が 1 のときは液相に関するものを，2 のときは気相に関するものを表すとする．次に，気液の界面（気泡の表面，以下 Γ とする）では，相変化が起こらず質量と運動量が保存することから，以下のとびの条件が成立する必要がある[9)]．

$$[\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{n}]_{i=1}^{i=2} = 0, \tag{3}$$

$$[-T_i \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n}]_{i=1}^{i=2} = \sigma\kappa. \tag{4}$$

ここで，$\boldsymbol{n}$ は Γ 上の水から泡へ向かう単位法線ベクトル，$\sigma(>0)$ は表面張力係数，κ は $\boldsymbol{n}$ 方向の Γ の平均曲率，T_i は応力テンソルである．

結局，水中の気泡の挙動は，方程式 (1)～(4) と，セルの境界での適切な境界条件によって与えられることになる．我々の目標を達成するには，まず，小さなレイノルズ数領域で，形を変えず等速で直線状に上昇する気泡に対応する安定な解を，この方程式系が持つことを示し，レイノルズ数が100程度でそれが不安定化してホップ分岐によって振動する解を生じることを示し，さらに，1000程度のレイノルズ数でどのような状況が現れるかを検討する必要があるだろう．しかし，この問題は（少なくとも筆者には今のところ）少々手強い．そこでまず，小さなレイノルズ数領域で，等速直線状に上昇する解を見つけることから始めることに

*1)　気相に関しても非圧縮性を仮定するのは現実的ではないと思われるが，ここでは記述の簡便さのためにこのようにした．

し，そのような範囲で通用すると思われる近似問題を検討することにする．

4. ヘレーショウ近似

以下，セルの幅方向に x 軸，長さ方向（鉛直上向き）に y 軸，隙間方向に z 軸をとるものとする．外力は重力のみなので，重力加速度を g として $\boldsymbol{F}={}^t(0,-g,0)$ である．さらに，h が小さいことから 2 次元的な流れになっていると仮定して，速度 $\boldsymbol{v}_i={}^t(u_i,v_i,0)$ としよう．レイノルズ数が非常に小さければ，流体の速度は非常に遅く，定常流れであると仮定してもいいだろうから，(2) の右辺を 0 とする定常ストークス近似を行おう．$\mu_i=\rho_i\nu_i$ とおき，これを成分で書けば，

$$\begin{cases} p_{ix}-\mu_i\nabla^2 u_i=0, \\ p_{iy}+\rho_i g-\mu_i\nabla^2 v_i=0, \\ p_{iz}=0 \end{cases}$$

を得る．こうなると，圧力 p_i は x,y,t のみの関数であり $p_i=p_i(x,y,t)$ という形に書けることがわかる．このときさらに，ある関数 $a_i=a_i(x,y,t)$, $b_i=b_i(x,y,t)$ を用いて u_i, v_i が $u_i=a_i z(z-h)$, $v_i=b_i z(z-h)$ という形に書けるとすると $u_{ixx}+u_{iyy}=v_{ixx}+v_{iyy}=0$ となることがわかり，以下を得る．

$$u_i=\frac{p_{ix}}{2\mu_i}z(z-h), \quad v_i=\frac{p_{iy}+\rho_i g}{2\mu_i}z(z-h).$$

流体は非圧縮としていたので，(1) より，

$$\nabla^2 p_i=p_{ixx}+p_{iyy}=0 \tag{5}$$

となり，p_i は調和関数でなければならない．

問題を空間 2 次元の問題に縮約するために，u_i, v_i の z 方向の平均 $\overline{u}_i,\overline{v}_i$ を計算し，これを改めて $\boldsymbol{v}_i={}^t(\overline{u}_i,\overline{v}_i)$ と書くことにすると，

$$\boldsymbol{v}_i=-\frac{h^2}{12\mu_i}\nabla p_i+\frac{\rho_i g h^2}{12\mu_i}{}^t(0,-1) \tag{6}$$

となる．以上の近似はヘレ-ショウ近似と呼ばれているが，これによって，(1), (2) は空間 2 次元の問題 (5), (6) に帰着された．

次に，気液界面 Γ 上では，とびの条件 (3), (4) が成立しなければならない．気泡が xy 平面に底面を持つ柱状であると仮定して，上と同様に，これらの式の z 方向の平均をとれば，全く同じ形の空間 2 次元版のとびの条件を得る．今，流体がニュートン流体であると仮定しているので，さらに (4) は

$$\left[p_i+\frac{h^2}{6}\mathrm{Hess}(p_i)\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}\right]_{i=1}^{i=2}=\sigma\kappa \tag{7}$$

となる．ここで，$\mathrm{Hess}(p_i)$ は p_i のヘッセ行列である．また，Γ の移動速度 V は，質量保存則より次式で与えられる．

$$V=\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{n}. \tag{8}$$

結局界面での条件は，(3), (7), (8) に帰着された．

最後に，セルの境界での条件は，セル上部 $\partial_{天}$ で圧力は大気圧 p_a と等しいとし

$$p_1=p_a\ (\text{大気圧}) \quad \text{on } \partial_{天}, \tag{9}$$

セルの左右と下部 $\partial_{左},\partial_{右},\partial_{地}$ で

$$\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{N}=0 \quad \text{on } \partial_{左},\partial_{右},\partial_{地}$$

を満たすとしよう．ここで，$\boldsymbol{N}$ はセルの境界の外向き法線ベクトルである．後者は以下と同じである．

$$\frac{\partial p_1}{\partial x}=0 \quad \text{on } \partial_{左},\partial_{右}; \quad \frac{\partial p_1}{\partial y}=-\rho_1 g \quad \text{on } \partial_{地}. \tag{10}$$

以上をまとめると，レイノルズ数が小さい領域では，泡の挙動は，(3), (5)〜(10) によってモデル化されると期待できる．

5. 数値実験

上で得られたモデルは，移動境界問題である．移動境界問題の数値計算は，計算格子形成や界面の取扱いの困難さから，一般にはそう容易な問題とは言えない．しかしこの問題の場合には，以下のような手法で比較的簡単に数値計算が行える．

まず，圧力 p_i は調和なので，これの近似を代用電荷法（室田の不変スキーム[10]）によって求める．

このスキームは，電荷点 $\boldsymbol{c}_k(k=1,\cdots,N)$ を領域 Ω の外部に適当に配置し，Ω で調和な関数 p を，ラプラス方程式の基本解の重ね合わせとして

$$\widetilde{p}(\boldsymbol{x})=Q_0-\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N}Q_k\log|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}_k|\quad(\boldsymbol{x}\in\overline{\Omega})$$

のように近似し，領域内部の N 個の拘束点 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_j(j=1,\cdots,N)$ での p に関する条件と $\sum_{k=1}^{N}Q_k=0$ を満足するように仮想電荷 Q_k を決めることで近似解を求める方法である．この方法で，セルの境界および Γ での条件を満足する p_1,p_2 の近似解を複雑な格子形成を必要とせずに求めることができる．

次に，求めた p_i によって，速度場を計算し，そこから定まる Γ の移動速度で，Γ 上の拘束点を移動させることで時間発展させる．このように，界面を直接離散化して近似解を求める方法を直接法と言うが，工夫のない直接法は数値的に極めて不安定であることが知られている．そこでここでは，接線方向の移動を利用した木村による境界追跡法[11]を適用して，そのような不安定性を回避した．

サイズの異なる幾つかの円および楕円を初期の泡の形状として数値実験を行った．図 6 左は 30 度傾けた長径 1, 短径 0.5 の楕円を，図 6 右は直径 3 の円を左の壁に近い位置に配置したものを，それぞれ初期の泡の形状とした計算結果である．数値実験によれば，初期の泡のサイズ・形状によらず，面積が保存したまま形状は円に収束し泡の重心が一定速度で上昇する様子が観察された．その上昇速度は面積をパラメータとした単調増加関数であるようである．しかしながら，サイズ・初期形状によらず軌道の不安定性は観察されなかった．

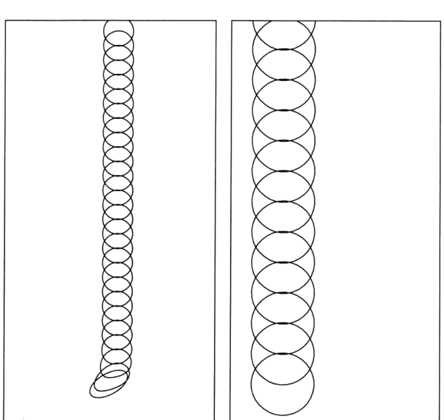


図 6　数値計算例．左右とも同じ時間間隔．

6. おわりに

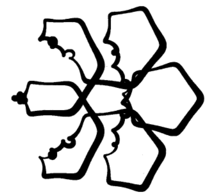
今回この小文を書く機会を与えられ大変幸せであった．「泡」の挙動の本質に迫る記事とは到底言えないが，本稿によって，「泡」というこの身近なしかし極めて面白い現象へ読者諸賢の興味を誘うことが多少ともできたのであれば幸いである．最後に，川口正美先生には「泡」に関してたくさんのことを教えて頂いただけでなく，多くの貴重なデータ・図版を本稿で使用することを許可して頂いた．ここで改めて感謝申し上げます．

参考文献

1) Ohl, C.D., Tijink, A. and Prosperetti, A., The added mass of an expanding bubble, *J. Fluid Mech.* **482** (2003) 271–290.
2) Lohse, D., Bubble puzzles, *Physics Today* **56**(2) 2003.（訳：家泰弘「泡の不思議，バブルの効用」パリティ **18** (2003) 34–42）.
3) 仁賀助宏，郷伸彰，三宅一生，川口正美，**高分子溶液中を上昇する泡のダイナミクス**，高分子加工 **53** (2004) 274–277.
4) Kawaguchi, M., Niga, S., Gou, N., and Miyake, K., Buoyancy-driven path instabilities of bubble rising in simple and polymer solutions of Hele-Shaw cell, *J. Phys. Soc. Japan* **75** (2006) 124401.
5) 郷伸彰，**高分子溶液中を上昇する泡のダイナミクス**，平成 **14** 年度・三重大学大学院・修士論文（工学研究科・博士前期課程・分子素材工学専攻）.
6) 三宅一生，**ヘレーショウ セル中を上昇する泡の後流の可視化**，平成 **14** 年度・三重大学・卒業論文（工学部・分子素材工学科・有機素材化学研究室）.
7) 池田吉宏，private communication.
8) Kelley, E. and Wu, M., Path instabilities of rising air bubbles in a Hele-Shaw cell, *Physical review letters* **79** (1997) 1265–1268.
9) 日本流体力学会編集，**混相流体の力学**，朝倉書店 (1991).
10) 室田一雄，**代用電荷法におけるスキームの「不変性」について**，情報処理学会論文誌 **34** (1993) 533–535.
11) 木村正人，**移動境界問題の数値解析**，数学 **52** (2000) 1–15.

（うしじま・たけお，東京理科大学理工学部）
（やざき・しげとし，宮崎大学工学部/CTU in Prague）

振動から時空間パターンへ



小川 知之

1. はじめに

時間的にも空間的にも振動する現象はなかなか見飽きないものである．海の波しかり，Belousov–Zhabotinsky（BZ）反応の空間パターンしかり，蛍の集団発火しかり，粘菌の動きしかり，競技場での観客のウェーブしかり，枚挙にいとまがない．これらの「波」の挙動には単純なものから複雑なものまである．もちろん一つ一つの現象のメカニズムも違う．しかしながら，こうした現象の多くは時間的に振動する機構を内在している．例えば，BZ反応でも，溶液を撹拌して空間的に一様な状態にしておけば，色の時間周期的な変化のみを観測することができる．競技場のウェーブでも，観客一人一人は立ったり座ったりを周期的に繰り返しているだけだ．むしろ逆に考えたほうがいいかもしれない．時間的に振動するもの（振動子）を複数個並べよう．それらが同期して振動すれば空間パターンとは言えないが，適度にずれて振動すれば振動する空間パターンが生じる．

さて，図1は中西ら[3)]による電気化学系の振動現象である．電気化学系の周期振動は電極を不活性化させる被覆率（電位等に依存）と電流発生を伴う化学反応によって説明される．中西らの実験系においても電位と過酸化水素濃度の2種のダイナミクスが振動現象を引き起こす．一方，反応電極（WE, working electrode）の電位は補助電極（CE, counter electrode）との間に挿入された参照電極（RE, reference electrode）を基点として定電圧制御される．これによって反応電極上での空間的非一様な電位状態は平均化され参照電極から瞬時にフィードバックされることになる．そのフィードバックを可変することにより，円環状の電極にわたり一様に振動（図1(a)）したり，また空間的に変化しながら振動したりさせることがで

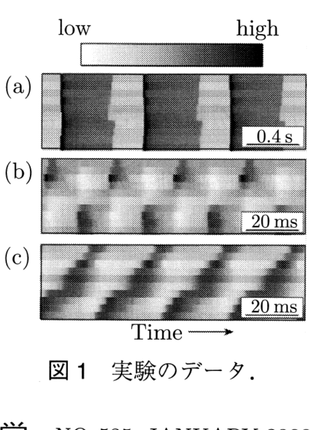


図1 実験のデータ．

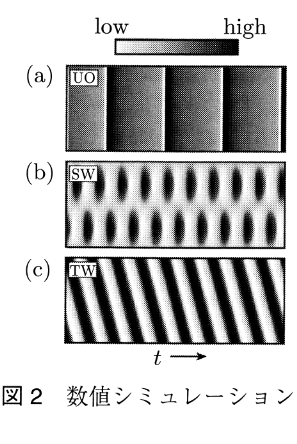


図2 数値シミュレーション．

きる．図 1 (b), (c) はそれぞれスタンディング波（SW），進行波（回転波，RW）と呼ばれる．なお，このような大域的な抑制結合は電気化学系に限らず近年盛んに研究されている[1~5,7,8]．

中西らはこのモデルに関して数値シミュレーションも行い（図 2）実験に対応する数値計算結果を得ているが，ここでは彼らの数理モデルを縮約し，より普遍的と思われる，反応拡散系や結合振動子系のウェーブ分岐と呼ばれる振舞いを紹介したい．

2. 反応拡散系の現象論的モデル

この節では，環状の電極での電気化学の実験結果[1,3]に関連して次のような大域的な抑制効果をもつ反応拡散系の振舞いを簡単に紹介する．

$$\begin{aligned} u_t &= D_1\Delta u + f(u,v) - s\frac{1}{L}\int_0^L u dx, \\ v_t &= D_2\Delta v + g(u,v), \quad x \in [0,L]. \end{aligned} \tag{1}$$

$u(t,x), v(t,x)$ は元来，電極付近の電気 2 重層の電位差と反応化学物質の濃度を表すが，ここでは本来の精密なモデルから離れているので，それぞれ興奮因子・抑制因子と考えてもらいたい．ここで，$D_1, D_2, L > 0$, $s \geq 0$ でさらに f, g を次のように定める．

$$\begin{aligned} f(u,v) &= pu - pv + Q(u,v), \\ g(u,v) &= qu - v + R(u,v). \end{aligned}$$

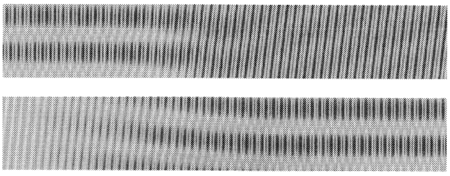


図 3　方程式 (1) のシミュレーション結果．縦軸が空間方向，横軸が時間（右が正の向き）．境界条件は周期的．上下ともに $L = 2\pi, p = 2.01, q = 1.5, s = 2.0, D_1 = 0.8, D_2 = 0.2, a_1 = b_1 = c_1 = c_2 = c_3 = 0$．さらに上では $a_2 = 1, b_2 = 0$ で，下では $a_2 = 0, b_2 = 1$ とした．上では SW の初期値からスタートし RW に収束，逆に下では RW の初期値からスタートし SW に収束している．

ただし p はパラメーターで，定数 $q > 1$，さらに Q, R は次で定まる 2 次以上の非線形項とする．

$$\begin{aligned} Q(u,v) &= a_1u^2 + b_1uv + c_1v^2 - c_3u^3, \\ R(u,v) &= a_2u^2 + b_2uv + c_2v^2. \end{aligned}$$

かくして (f, g) で定まるベクトル場は定数 q が $q > 1$ を満たすとき $p = 1$ でホップ分岐*1) を起こす．なお境界条件は周期境界条件とする．したがってその際は空間的に一様な時間周期解がある．s が小さく抑制効果が少ないと，この一様な振動解が $p = s + 1$ で最初に分岐するので，空間的に非一様な振動は観測されない．しかしながら s を大きくしていくと，一様な振動解より早く非一様な振動解が先にホップ分岐で出現し，観測されるようになる．このことがウェーブ分岐と呼ばれる，本稿の主題である．これは，時間的に振動する機構から如何にして空間的に非一様な振動パターンが生じるかということを理解する上でのキーポイントである．また，ウェーブ分岐が起きたときに，SW や RW が選択されて出現する（図 3 参照）のはなぜか，あるいはもっと他の時空間パターンは存在するのかなどを念頭において次節を読んでほしい．

なお，(1) のような大域抑制を伴う 2 コンポーネントの反応拡散系は次のような 3 コンポーネントの反応拡散系の極限（$\tau > 0$ を小さく，D_3 を大きく取る）とも考えられることを付け加えておく[6,8]．これも次節の結合振動子系で明らかになるであろう．

$$\begin{aligned} u_t &= D_1\Delta u + f(u,v) - sw, \\ v_t &= D_2\Delta v + g(u,v), \\ \tau w_t &= D_3\Delta w + u - w. \end{aligned}$$

3. ウェーブ分岐を起こす結合振動子系

ここでは有限個の振動子の拡散結合系を用いて，ウェーブ分岐を説明しよう．前節の反応拡散系の

*1)　平衡点の周りの線形化行列が純虚数固有値をもつとき，一般に観察される分岐で，平衡点が不安定化して周期解が発生することが知られている．なお，2×2 行列のトレースが 0 になることは，純虚数固有値をもつための必要条件である．

離散化と考えてもいいので，これは本質的には同じものであるが，より初等的に理解できるであろう．数個の振動子であれば少数次元の常微分方程式系なので，数値実験することも容易であろう．

まず初めに，次のような常微分方程式系で振動子を定める．

$$\begin{aligned} \dot{u} &= f(u,v) - sw, \\ \dot{v} &= g(u,v), \\ \tau\dot{w} &= u - w. \end{aligned} \tag{2}$$

ここで，記号 $\dot{u}$ は $\frac{du}{dt}$ を表し，f,g は前節で与えたものとする．s,τ は定数で特に τ は十分小さいとしよう．振動子を定めるのに (u,v) だけの 2 次元系でなくわざわざ w という変数を持ち込むのを奇妙に思う向きもあろう．しかしこの第 3 番目の補助的な変数の役割あってこそウェーブ分岐が起きるのである．

(2) で定まる n 個の振動子が 1 次元的に隣接結合し，輪をなしているとする．すなわち $0 \le j \le n-1$ として j 番目の振動子 X_j の状態は (u_j, v_j, w_j) で表され，両隣と次の意味で拡散的に結合しているとしよう．

$$\begin{aligned} \dot{u_j} &= f(u_j,v_j) - sw_j + D_1(\Delta u)_j, \\ \dot{v_j} &= g(u_j,v_j) \qquad\qquad + D_2(\Delta v)_j, \\ \tau\dot{w_j} &= u_j - w_j \qquad\qquad + D_3(\Delta w)_j. \end{aligned} \tag{3}$$

ただし，数列 $\{a_j\}$ に対して数列 Δa を $(\Delta a)_j = (a_{j+1} - a_j) + (a_{j-1} - a_j)$ で定める．また結合がサークルをなしていると仮定したので振動子 X_{-1} は X_{n-1} と，振動子 X_n は X_0 と同一視する．(3) は $(u_j, v_j, w_j) = (0,0,0)$, $0 \le j \le n-1$ を解として持つので，この定常解の安定性がパラメーター p に関してどのように変化するかを調べよう．

小手調べに 2 つの振動子（$n = 2$）で考えよう．

$$\begin{aligned} \dot{u_j} &= f(u_j,v_j) - sw_j + 2D_1(u_{j'} - u_j), \\ \dot{v_j} &= g(u_j,v_j) \qquad\qquad + 2D_2(v_{j'} - v_j), \\ \tau\dot{w_j} &= u_j - w_j \qquad\qquad + 2D_3(w_{j'} - w_j). \end{aligned} \tag{4}$$

ここで $j, j' \in \{0,1\}, j \neq j'$ である．τ が小さいとき形式的に第 3 式を 0 としてやると*2)

$$\begin{aligned} &u_0 - w_0 + 2D_3(w_1 - w_0) = 0, \\ &u_1 - w_1 + 2D_3(w_0 - w_1) = 0 \end{aligned}$$

であり，これを w に関して解き (4) に代入すると次の 4 次元の常微分方程式系が得られる．

$$\begin{aligned} \dot{u_j} &= \left(p - 2D_1 - s\tfrac{1+2D_3}{1+4D_3}\right)u_j - pv_j \\ &\quad + \left(2D_1 - s\tfrac{2D_3}{1+4D_3}\right)u_{j'} + (h.o.t.), \\ \dot{v_j} &= qu_j + (-1 - 2D_2)v_j \\ &\quad + 2D_2 v_{j'} + (h.o.t.), \\ &\quad (j, j' \in \{0,1\}, j \neq j'). \end{aligned} \tag{5}$$

ここで $(h.o.t.)$ は高次項を表す．さらに座標変換 $(\alpha_i, \beta_i, \alpha_a, \beta_a,) = \frac{1}{2}(u_0+u_1, v_0+v_1, u_0-u_1, v_0-v_1)$ を通して (5) を書き換えよう．

$$\begin{aligned} \dot{\alpha_i} &= (p - s)\alpha_i - p\beta_i + (h.o.t.), \\ \dot{\beta_i} &= q\alpha_i - \beta_i + (h.o.t.), \\ \dot{\alpha_a} &= \left(p - 4D_1 - \tfrac{s}{1+4D_3}\right)\alpha_a - p\beta_a + (h.o.t.), \\ \dot{\beta_a} &= q\alpha_a - (1 + 4D_2)\beta_a + (h.o.t.). \end{aligned} \tag{6}$$

ここで (α_i, β_i) は同位相（インフェーズ）成分，(α_a, β_a) は反位相（アンチフェーズ）成分である．線形部分は同位相成分と反位相成分が分離していることに注意されたい．したがって 0 解の周りの線形化固有値は次の 2 つの行列の固有値である．

$$\begin{pmatrix} p - s & -p \\ q & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} p - 4D_1 - \frac{s}{1+4D_3} & -p \\ q & -1 - 4D_2 \end{pmatrix}.$$

これらのトレースを見ることにより同位相成分と反位相成分のホップ分岐点を知ることができる．すなわち $p = 1 + s$ が同位相成分のホップ分岐点で，$p = 1 + 4(D_1 + D_2) + \frac{s}{1+4D_3}$ が適当な条件の下で反位相成分のホップ分岐点となる．反位相成分のホップ分岐に付加条件が必要なのは拡散係数によっては定常分岐が起きる可能性があるからで，例えば $D_1 > D_2 + 4D_2^2$ をみたすようにとっておけば実際に純虚数固有値をもちホップ分岐が起こることがわかる．

*2) このことの正当性には議論の余地があるが以下に行うような 0 解の周りの線形安定性と分岐解析の議論だけなら問題ない．

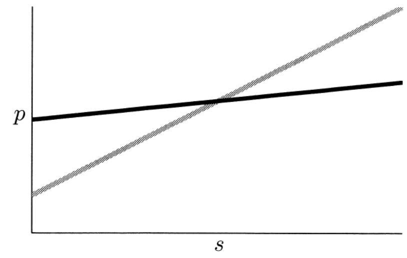


図 4　同位相成分（薄い線）と反位相成分（濃い線）の臨界安定曲線．横軸 s で縦軸 p．

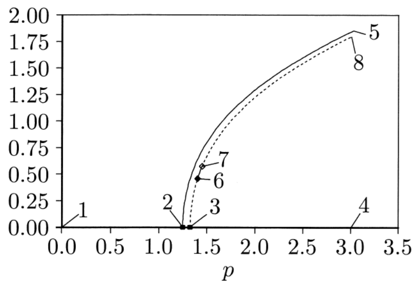


図 5　数値的に求めた分岐図．横軸は p．実線部分が安定．

この 2 つのホップ分岐点の集合（臨界安定曲線）を (s, p) 平面に図示したものが図 4 である．s が小さいときには同位相成分のほうが先にホップ分岐を起こすのに対して，$s^* := \frac{(D_1+D_2)(1+4D_3)}{D_3}$ を境に $s > s^*$ のときは，反位相成分が同位相成分よりも先にホップ分岐する．かくして第 3 成分 w の効果によりウェーブ分岐が起こることがわかった．図 5 は，非線形項が第 1 式の $-u^3$ だけとした場合に数値的に求めた (4) の分岐図である．このように，最初にホップ分岐した解が安定で後から分岐した解は，途中で安定性を回復することはあるものの，一般には観測可能ではない．臨界安定曲線が交わるところは多重分岐点と呼ばれ同位相成分と反位相成分が同時に分岐する点である．ここでさらに非線形項の影響を考慮した分岐解析を行うと同位相振動解と反位相振動解の単独解だけが安定で観測可能なのかあるいはそれらの複合した解が安定に出ることもあるかどうかなどがわかる．ここでは，ある特定の非線形項を与え多重分岐点の周りの様子を図 6 に示すにとどめる．

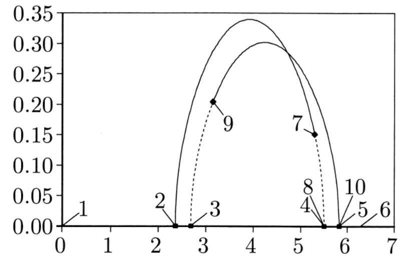


図 6　多重分岐点周りでの分岐図．横軸は多重分岐点を一回りする角度を表す．2 つの枝はそれぞれ同位相，反位相振動解で実線は安定，点線は不安定であることを意味する．分岐点 7,9 を複合モード解がトーラス分岐*3) で繋いでいる（はずである）．

4. 3 個以上の結合振動子系

少し先を急いで，n 個の振動子系でのウェーブ分岐を議論しよう．(3) でも，τ が小さいことを用いて w を u について解くと w の働きがよくつかめる．それには $\tau = 0$ として得られる

$$u_j - w_j + D_3(w_{j-1} - 2w_j + w_{j+1}) = 0 \quad (7)$$

という連立方程式を直接解かずにフーリエ変換して解くと都合が良い．フーリエ変換なんて聞いたことがないという読者も慌てることなかれ．実は何を隠そう，前節の同位相・反位相成分分解もフーリエ変換なのである．ここで言うフーリエ変換とは，n 次元のベクトル $(u_0, u_1, \cdots, u_{n-1})$ から n 次元のベクトルへの次で定める一次変換である．

$$\hat{u}_k := \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n} u_j W^{-kj}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

ここで，$W = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ は 1 の n 乗根である．したがって $\hat{u}_k$ には $\hat{u}_{k+n} = \hat{u}_k$ という周期性があり，k は n の剰余類で考えればよい．ここでは，$k \in \Lambda_n := \{k \in \mathbf{Z}; |k| \le \frac{n}{2}, k \ne -\frac{n}{2}\}$ として考えよう．例えば $\Lambda_2 := \{0, 1\}$, $\Lambda_3 := \{0, \pm 1\}$, $\Lambda_4 := \{0, \pm 1, 2\}$ である．逆行列を用いてフーリエ逆変換は以下のように書ける．

*3)　トーラス分岐とは，周期解の分岐の一形態で，直観的に言うなら，周期解の上に別の周期解が重ねられたような振動を生じる．

$$u_j := \sum_{k\in\Lambda_n} \hat{u}_k W^{kj}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

さて，このフーリエ変換で $\{u_j\} \to \{\hat{u}_k\}$ と移すと便利なことがいろいろある．例えば $\{u_j\}$ を1つシフトした数列 $\{s_j\}$ ($s_j = u_{j-1}$) はフーリエ変換で $\{W^k \hat{u}_k\}$ に移ることを確かめよ．さて，この性質から解くべき式(7)は

$$\{1 + D_3(2 - W^k - W^{-k})\}\hat{w}_k = \hat{u}_k$$

となり，したがって両辺割り算するだけで

$$\hat{w}_k = \frac{1}{1 + 4D_3 \sin^2 \frac{k\pi}{n}} \hat{u}_k$$

と解くことができる．それでは u_j, v_j, w_j をそれぞれ $\hat{u}_k, \hat{v}_k, \hat{w}_k$ にフーリエ変換して(3)の線形部分を書き直そう．もちろんここで，上の式を使うと，$\hat{w}_k$ は消去される．第 k モード $(\hat{u}_k, \hat{v}_k)$ ごとに次の行列に分解されるのを見るのは前節の個別計算より容易であろう．

$$\begin{pmatrix} p - 4D_1 \sin^2 \frac{k\pi}{n} \\ -s\frac{1}{1+4D_3 \sin^2 \frac{k\pi}{n}} & -p \\ q & -1 - 4D_2 \sin^2 \frac{k\pi}{n} \end{pmatrix}.$$

まず同位相成分に相当する第0モードの線形化行列は n によらずに

$$\begin{pmatrix} p - s & -p \\ q & -1 \end{pmatrix}$$

となる．

さらに $n = 3$ のときの $k = \pm 1$ モードは左右回転モードと呼びたいが，その線形化行列は

$$\begin{pmatrix} p - 3D_1 - s\frac{1}{1+3D_3} & -p \\ q & -1 - 3D_2 \end{pmatrix},$$

$n = 4$ のときの $k = \pm 1$ モードと $k = 2$ モードの線形化行列はそれぞれ

$$\begin{pmatrix} p - 2D_1 - s\frac{1}{1+2D_3} & -p \\ q & -1 - 2D_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} p - 4D_1 - s\frac{1}{1+4D_3} & -p \\ q & -1 - 4D_2 \end{pmatrix}.$$

$n = 3$ のときに，0モードと ±1 モードの

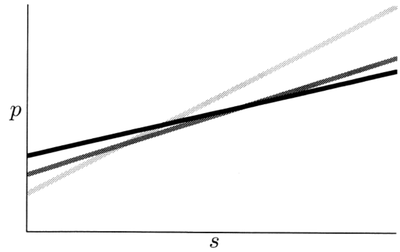


図 7　色の薄い順に $0, \pm 1, 2$ モードの臨界安定曲線.

どちらが先にホップ分岐するかが $s = s^* := \frac{(D_1+D_2)(1+3D_3)}{D_3}$ を境に変わるのは前節と同様である．一方，$n = 4$ のときは 3 種類あるので，図 7 に臨界安定曲線を示す．$D_1 + D_2, D_3, s$ により 3 つのうちのどのモードが初めに分岐するかを制御できることがわかる．

ここで注意が必要である．$k = \pm 1$ モードは 2 つとも同時に不安定化するので，そもそもこれだけで多重分岐点になっている．もしこれらのモードが単独でホップ分岐するならば回転波 RW であり，共存して分岐するならばスタンディング波 SW となる．ここで分岐解析が必要なのである．すなわち中心多様体近似を用いて，2 つの臨界モードの変化を支配する常微分方程式系を求めることができる．SW や RW はその平衡点なので，安定性を調べればどちらが選択されるかがわかる．ここでは，RW と SW のいずれが選択されるかが非線形性の違いにより決定されるということを数値シミュレーション（図 8）で示して終わりにする．

5. まとめ

電気化学の実験をされている阪大基礎工の中西周次さんから図 1 を見せてもらったのが数年前．以後，回り道をしながら結局ここで紹介したようなウェーブ分岐にたどり着いたのはひとえに大学院生の福島聡史君と楽しみながら数値計算を繰り返したことによる．たどり着いたら，実はそこにも他の国の旗がすでに立っていたことに後から気づくのだが，まだ辺境のためかそれほど掘り尽くされてはいないようである．

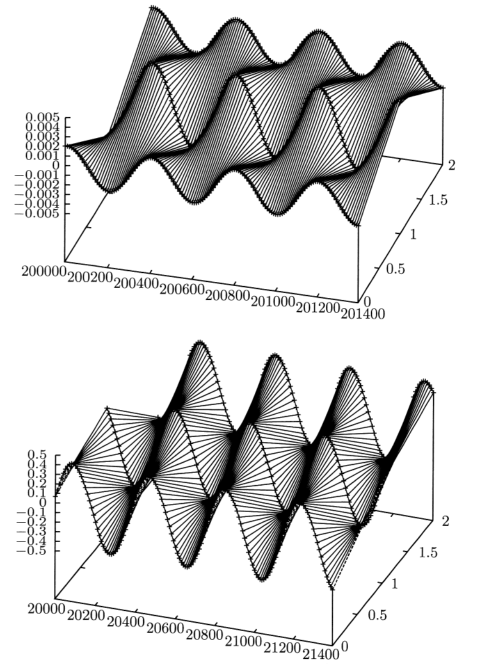


図 8　3 振動子系での SW と RW．横軸が時間方向で奥行き方向に振動子 0,1,2 を表示．上図では，振動子 0,2 が同期して振動子 1 と反位相になっているのに対し，下図では 3 つが $\frac{1}{3}$ 位相ずれて振動している．

参考文献

1) J. Christoph and M. Eiswirth, *Chaos (AIP)*, **12**(1), 215–230, (2002).
2) J. Christoph, R.D. Otterstedt, M. Eiswirth, N.I. Jaegera and J.L. Hudson, *Journal of Chemical Physics*, **110**(17), (1999).
3) S. Fukushima, S. Nakanishi, K. Fukami, S. Sakai, T. Nagai, T. Tada and Y. Nakato, *Electrochemistry Communications* **7**, 411–415, (2005).
4) M.T.M. Koper and J.H. Sluyters, *J. Electroanal. Chem.*, **303**, 73–94, (1991).
5) N. Mazouz, G. Flatgen, and K. Krischer, *Phys. Rev. E* **55**, 2260–2266 (1997).
6) T. Ogawa , to appear in *Discrete and Continuous Dynamical Systems*.
7) F. Plenge, Y.-J. Li and K. Krischer, *J. Phys. Chem. B*, **108**(38), (2004).
8) L. Yang, M. Dolnik, A.M. Zhabotinsky and I.R. Epstein, *J. Chem. Phys.*, **117**, 7259–7265, (2002).

（おがわ・としゆき，大阪大学大学院基礎工学研究科）

波を視る

小林　健太

1. はじめに

古来から，人間は水と深い関わりを持ちながら生活してきた．必然的に，水面上に形作られる波もまた，人々にとって関わりの深いものであったと考えられる．コップの中の波紋から海の津波に至るまで波には様々な大きさや形があり，しかも形成されるパターンは刻一刻と変化してとどまることがない．変化し続ける様子や，いつかは消えてしまう儚さが人間の感性に訴えかけるのか，昔から人々は，波を絵に描いたり，歌に詠んだりして親しんできた．図 1 は葛飾北斎の版画だが，この絵はゴッホやドビュッシーなど海外の芸術家に影響を与えたことで有名である．図 2 は青海波と言われる文様で，一説によると中国西域から伝わったとも言われている．波の持つ魅力が，人種を超えて普遍的であることを感じさせる好例である．

2. トロコイド波

人間が波に親しんできた長い年月に比べると，波について本格的に研究が始まったのはごく最近であると言える．波の解析の難しさは，本質的に非線形な問題であることと，自由境界の問題であることに起因する．しかしそれでも，17 世紀に Newton が力学の基礎を確立し，18 世紀に Euler と Lagrange が流体の運動方程式を作ったことにより，ようやく波の力学が構築される準備が整った．初めて水面波のモデルを考えたのは Gerstner である．彼は 1802 年に，Lagrange の運動方程式を満たす有限振幅の波を考案した．この波は水の粒子が円運動をするという仮定の下に導かれたもので，波形がトロコイド曲線 (円を回転させながら移動したときに円上の一点の軌跡がなす曲線) になることから，トロコイド波と呼ばれている (図 3)．

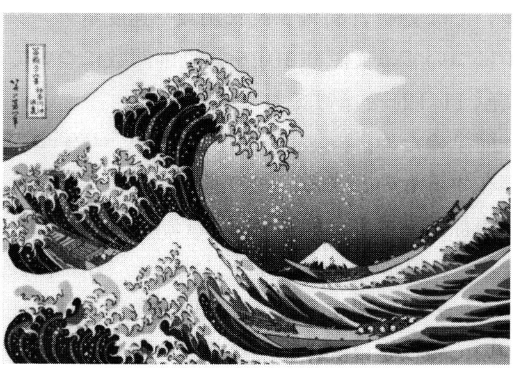


図 1　葛飾北斎「富嶽三十六景 神奈川沖浪裏」．

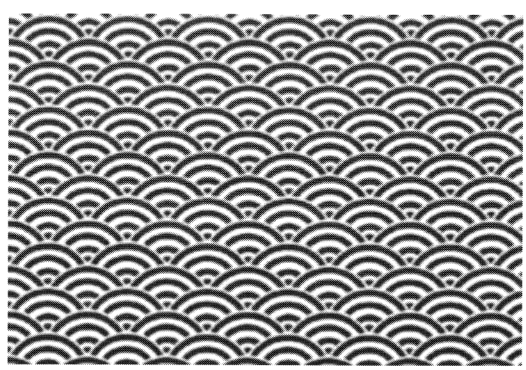


図 2　波の文様（青海波）．



図 3　トロコイド波
$(x, y) = (\theta - 0.5\sin\theta, 0.5\cos\theta)$.

トロコイド波は渦（流体粒子の回転運動）の存在を仮定した波であり，現実の波を正確に表現しているとは言い難いが，それでも，現実の波のそれなりの近似になっていることが知られており，CG等に用いられたり，工学の分野において波のサンプルとして簡易的に用いられたりすることがある．

3. モデルの単純化

実際の波の形成には様々な要因が関与している．すぐに思いつくだけでも，流体の運動，大気の動き，流体の粘性，温度差による対流，圧縮性，表面張力，底や岸の形状，などが考えられ，これらにより，実際の波は非常に複雑なパターンを形成する（図 4）．これらすべての要因を考慮してシミュレーションを行うには膨大な計算が必要になるが，仮に計算ができたとしても，結局，何が波の運動の本質なのか，焦点がぼやけてしまうことになりかねない．むしろ，単純化することにより本質に迫ることができるという考え方もある．このような立場から，波の運動モデルについて，媒質としては水を想定し，いくつかの単純化を行う．まず，波は空間の左右方向に沿って運動し，奥行き方向については運動は変化しないものとする．つまり，

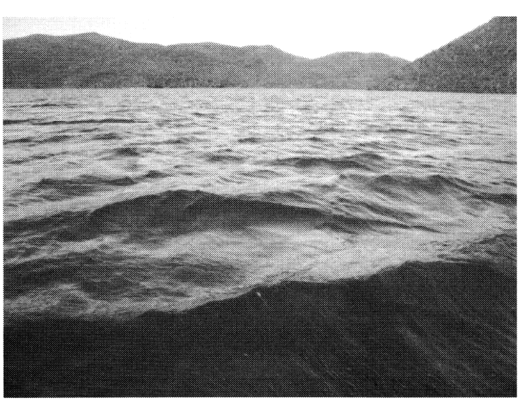


図 4　北海道然別湖で撮影．

奥行き方向のどこで断面を取っても同じ様子になる 2 次元的な運動を考えるのである．また，流体は非圧縮で粘性がなく，大気圧は一定で，大気の運動は流体に影響を与えず，底は無限に深く，波は形を変えず一定の速度で伝播し，周期的であるものとする．更に，流体は渦なし，つまり渦度が至るところでゼロであるものとする．渦度というのは，数学的な定義はひとまず置くとして，平たく言えば微小な渦の分布の極限として表現されるような物理量である．実際の波は渦なしの流れに良く適合すること，粘性のない流体では渦度は保存するので，静止状態から移行した流れには渦度がないと考えてよいこと，などから，最も素直な場合として渦なしの流れを想定するのは自然であると言える．

4. 波の方程式

波の方程式を一から導出するにはページが足りないので，ここでは概略のみ書くにとどめる．詳しくは岡本・東海林による水面波の解説書[1)]を参照されたい．大まかには，流体の Euler 方程式を非圧縮渦なし条件を利用して流れ関数と速度ポテンシャルで書き表し，正則関数の理論に持ち込み，Bernoulli の定理を経由し，表面張力に関する Laplace の式で圧力項を表面張力に置き換えて，波の方程式を求める．導出に際しての基礎的事項については上記の解説書の中でも参考文献が挙げられているが，日本語の文献としては，Euler 方程式や Bernoulli の定理については文献 2〜6) を，Laplace の式については文献 7, 8) を，流れ関数や速度ポテンシャルについては文献 9, 10) を，正則関数については文献 11, 12) を挙げておく．

簡単のため，一波長には山と谷が一つずつのみ存在するものとする．波の速度に合わせて移動する座標系を取り，図 5 のように，$x = 0$ が山に，$x = \pm L/2$ が谷になるように決める（L は波長）．また，x 軸に関する対称性を仮定する．対称性についての仮定は実は自然な仮定なのだが，ここでは詳細は省略する．これらの条件の下で，特に近

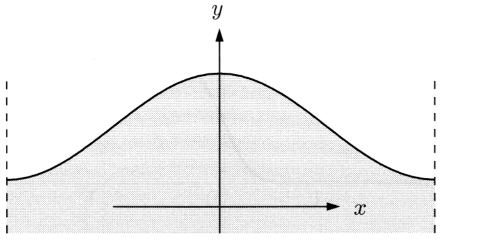


図 5　対称な波.

似を入れることなく，以下の方程式が求まる．

$$e^{2H\theta(s)}\frac{dH\theta(s)}{ds} - pe^{-H\theta(s)}\sin\theta(s) + q\frac{d}{ds}\left(e^{H\theta(s)}\frac{d\theta(s)}{ds}\right) = 0, \quad (1)$$

ここで H は

$$Hf(s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cot\left(\frac{s-\sigma}{2}\right)f(\sigma)\,d\sigma$$

で定義される Hilbert 変換，更に，$p = gL/(2\pi c^2)$, $q = 2\pi T/(\rho c^2 L)$ であり，c, g, ρ, T はそれぞれ，波の速度，重力定数，媒質の密度，表面張力である．求める波の形状は，s を媒介変数として

$$\frac{dx}{ds} = -\frac{L}{2\pi}e^{-H\theta(s)}\cos\theta(s), \quad (2)$$
$$\frac{dy}{ds} = -\frac{L}{2\pi}e^{-H\theta(s)}\sin\theta(s) \quad (3)$$

により定まる．また都合の良いことに，$\theta(s)$ は点 $(x(s), y(s))$ における波の波面と水平方向がなす角度となっている．方程式 (1) は 1925 年に Levi–Civita によって得られたものである．

5. 水面重力波

Levi–Civita 方程式 (1) において，p は重力に関する定数，q は表面張力に関する定数である．本来ならば表面張力も考慮するべきだが，ここでは表面張力のない，重力のみが働く波について解説する．このような波は水面重力波と呼ばれている．実際，水を媒質とするとき，波長が数 cm の場合には q と p は同じ程度のオーダーになり，表面張力の効果は無視できないが，波の波長が数 m 程度の場合には q は p に比べて 3 桁以上小さな値になる．

さて，$q = 0$ のときに Levi–Civita 方程式 (1) は

$$\frac{d}{ds}H\theta(s) = pe^{-3H\theta(s)}\sin\theta(s)$$

となり，更にこの方程式は

$$\theta(s) = \frac{1}{3\pi}\int_0^{\pi}\log\left|\frac{\sin\frac{s+t}{2}}{\sin\frac{s-t}{2}}\right|\frac{\sin\theta(t)}{\mu^{-1}+\int_0^t\sin\theta(w)dw}\,dt \quad (4)$$

と書き換えられる．ここで

$$\mu = \frac{3gL}{2\pi c^2}e^{-3H\theta(0)}$$

である．この方程式は 1921 年に（Levi–Civita 方程式とは独立に）Nekrasov により発見された．解に対する周期性と対称性，および一波長に山と谷が一つずつあるという条件は

$$0 < \theta(s) < \frac{\pi}{2}, \quad s \in (0, \pi),$$
$$\theta(0) = \theta(\pi) = 0,$$
$$\theta(s) = -\theta(-s), \quad \theta(s + 2\pi) = \theta(s),$$

と書き表せられる．これらの条件を満たす解は $(0, \pi)$ で正値を取ることから正値解と呼ばれている．Nekrasov 方程式 (4) は $3 < \mu$ において正値解を持つことが知られており，また，$\mu = \infty$ のときには正値解は原点で不連続になり $\lim_{s\to+0} = \pi/6$ となることも知られている．$\mu = \infty$ のときの解を極限波と呼ぶ．

6. Nekrasov 方程式の数値解法

Nekrasov 方程式 (4) は，その強い特異性のため，単純な差分法では精度良く解を計算するのが困難である．μ が比較的小さいうちは解はまだ素直な形状をしているが（図 6），μ が大きくなるにつれて原点における傾きが増大し，構造が原点付近に局在するようになる（図 7）．μ が比較的大きな場合（$10^3 \sim 10^{20}$ 程度）の解の様子を調べるこ

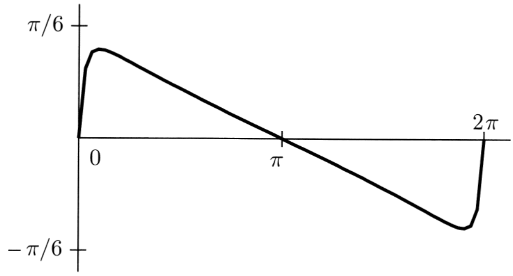


図 6　$\mu = 40$ のときの解．

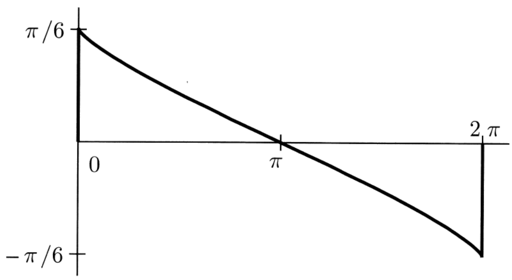


図 7　$\mu = 10^5$ のときの解．

とは，極限波との関連を調べる上でも重要であるので，大きな μ についても精度良く解を計算できるような方法を考える必要がある．著者らはこの目的のため，二重指数型変数変換公式を用いた数値解法を考案した[15]．大まかに説明すると，周期的な二重指数型変数変換関数 $\varphi(y)$ を次のように定義した．

$$\varphi(y) = \pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh\left(l(y+2n) \right) \right) - \alpha_n \right\},$$

$$\text{ただし}\quad \alpha_n = \begin{cases} 1 & (n \geq 1), \\ -1 & (n \leq 0). \end{cases}$$

この φ を用いて (4) を以下のように書き換えた．

$$\theta(\varphi(s)) = \frac{1}{6\pi} \int_{-1}^{1} \cot\left(\frac{\varphi(s) - \varphi(t)}{2} \right) \times \left\{ G(s) - G(t) \right\} \varphi'(t) dt,$$

$$G(x) = \log\left(\mu^{-1} + \int_0^x \sin\theta(\varphi(w)) \varphi'(w) dw \right).$$

分点を等間隔に取り，不定積分を高速 Fourier 変換を用いて計算することにより数値解を計算した．図 8 に $\varphi(y)$ を，図 9 に変数変換後の解を示す．原点付近の動きが引き伸ばされて，素直な関数に

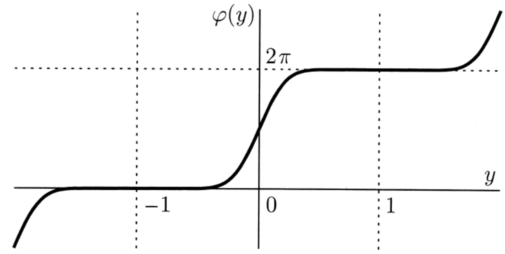


図 8　周期的な二重指数型変数変換関数．

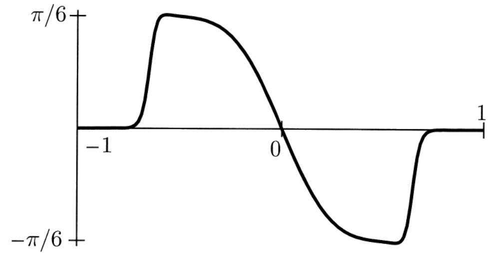


図 9　変数変換後の解（$\mu = 10^5, l = 3.2$）．

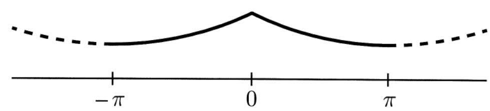


図 10　$\mu = 10^5$ のときの波の形状．

変換されていることがわかる．二重指数型変数変換については文献 13, 14) を参照のこと．図 10 は $\mu = 10^5$ のときの波の形状を (2) および (3) を用いて計算したものである．

7. 解の構造

数値計算を実行してみると，各 $\mu > 3$ に対して Nekrasov 方程式 (4) の正値解は一つに定まるという印象を受ける．実際，著者は精度保証付き数値計算を用いて，$3 < \mu \leq 170$ および $\mu = \infty$ の場合に正値解が一意であることを証明した．しかし，物理的には μ よりもむしろ p のほうが意味のあるパラメータである．よって，方程式を μ ではなく p の立場から調べてみるのも重要であろう．図 11 は p と μ の関係をグラフにしたものである．この図だけを見ると，p が減少するにつれて μ が増加するように思える．だが，図 11 の一部を横方向に引き伸

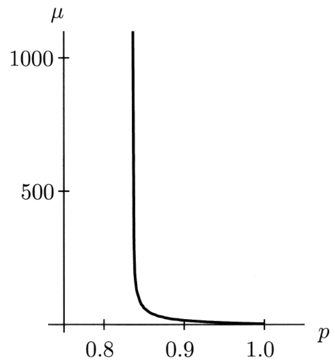


図 11 p と μ の関係.

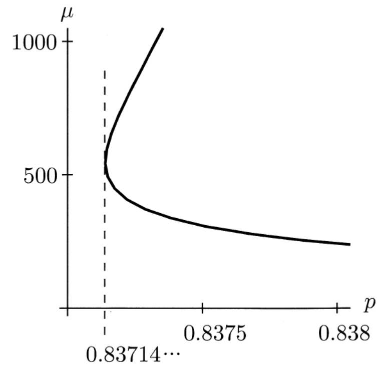


図 12 折り返し点.

ばすと (図 12), 曲線は折り返し点 (turning point) を持つことがわかる. 計算によると, 折り返し点の位置はおよそ $(p, \mu) = (0.8371404192, 546.36)$ である. この事実は, 一つの p に対して, 取り得る波の形は必ずしも一通りとは限らないということを意味している. また, 例えば波長が一定であるという条件の下で波の速さを増していくと, p の減少とともに μ が増加し, 徐々に波の頂点が鋭くなり, ある臨界速度で波は極限波になり, それ以上の速度では砕波に至る, というような単純なシナリオは成り立たないこともわかる. 波の速度を上げたときの不安定化は極限波を経由しないのである. また, 数値実験の結果から $(0.8381747050, 44400)$ 付近にも上記のものとは逆向きの折り返し点が存在する. このような折り返し点は無数にあるようだが, 詳しいことはあまり良くわかっていない. 他にも, μ が大きなときに正値解の一意性が成り立つかどうかなど, わかっていないことは多い.

8. 終わりに

今回は水面波のうちでも比較的単純なケースを紹介したが, 一周期に複数の山と谷があるような波や, 水面上を波が一つだけ移動するような孤立波など, 面白い現象は他にも色々とあり, それに付随して解くべき問題も多く存在する. また, 2 次元化した方程式ではなく 3 次元の方程式をそのまま扱い, 水面上のパターンを調べることも重要な課題である. 水面波の研究は, 数学的な理論と数値計算が互いに刺激し合いながら発展してきており, 数値計算の得意な研究者にとっては, まだまだ活躍の余地があるように思う. 特に精度保証付き数値計算に期待している.

最後に, 著者に水面波の深く豊かな世界に触れるきっかけを与えて下さった, 京都大学数理解析研究所の岡本久教授に感謝の意を表したい.

参考文献

1) H. Okamoto, M. Shōji: *The Mathematical Theory of Permanent Progressive Water-Waves*, World Scientific.
2) 佐野理：『連続体の力学』, 裳華房.
3) 日野幹雄：『流体力学』, 朝倉書店.
4) 戸田盛和：『流体力学 30 講』, 朝倉書店.
5) 今井功：『流体力学』, 岩波書店.
6) 巽友正：『新物理学 S21 流体力学』, 培風館.
7) エリ・ランダウ, イェー・リフシッツ：『統計物理学 (下)』(小林秋男訳), 岩波書店.
8) 小野周：『表面張力』, 共立出版.
9) 戸田盛和：『ベクトル解析』, 岩波書店.
10) 矢野健太郎, 石原繁：『ベクトル解析』, 裳華房.
11) 神保道夫：『複素関数入門』, 岩波書店.
12) 梶原壤二：『関数論入門』, 森北出版.
13) 杉原正顕・室田一雄：『数値計算法の数理』, 岩波書店.
14) H. Takahasi, M. Mori: Double exponential formulas for numerical integration, *Publ. Res. Inst. Math. Soc.*, vol.**9** (1974), pp.721–741.
15) K. Kobayashi, H. Okamoto, J. Zhu: Numerical computation of water and solitary waves by the double exponential transform, *J. Comp. Appl. Math.*, vol.**152** (2003), pp.229–241.

(こばやし・けんた, 金沢大学大学院自然科学研究科)

感染症の伝播を視る

細野　雄三

1. はじめに――感染症の脅威

地球上には様々な感染症が存在し，現在も我々の生活に深刻な影響を与えている[1,2]．感染症とは，細菌などの病原性微生物やウィルス等の病原体が体内に侵入し引き起される疾病を言い，その中で人から人へ感染するものを伝染病と言う．過去に人類に大きな惨禍を与えた天然痘やペストがその代表に挙げられるであろう．

1970 年以降，エボラ出血熱，エイズ，重症急性呼吸器症候群（SARS）など少なくとも 30 種類を超える新興感染症が出現している．2007 年 1 月 10 日に始まった宮崎県における鳥インフルエンザは 1 カ月弱で終息したが，もし高病原性鳥インフルエンザウィルスが人に適応を果たした場合，その被害は全世界で 500 万人から 1 億 5000 万人の死亡者が出ると予想されている[3]．実際，スペイン風邪と呼ばれる 1918 年から 1919 年のインフルエンザの世界的流行（パンデミック）で亡くなった人の数は 3000 万人を下らず，たぶん 5000 万人かそれ以上であったと推定されている[4]．

感染症が発生した場合，現在では，交通手段の発達，とりわけ航空機による短時間かつ長距離の移動が可能になったことや人口の都市への集中などにより短時間に広範に伝播する可能性が現実性を持っている．そのことを，実感をもって教えてくれたのが SARS である[1]．したがって，それらの発生と伝播のメカニズムを解明し，効果的に対処する方策を立てることは重要な課題となっている．そのためには，過去の感染症の事例に学ぶことが大切であることは言うまでもない．そして，実際に感染症を発生させ実験してみることは道義的に許されることではないことを考えると，数理モデルによる理論的解析とそのシミュレーションに基づく研究は将来の感染症の発生と伝播の理解にとって不可欠であり，問題の重要性から今後の更なる研究の進展と成果が大きく期待されている．

本稿では，感染症の伝播の最も素朴なモデルの一つである反応拡散モデルを取り上げ，感染症の伝播の基本的な特徴とその様相を，解析的な結果を交えて数理モデルのシミュレーションにより視てみよう．

2. 中世ペストの伝播

Langer は，1964 年の論文[5]で 1348 年から 1350 年にヨーロッパを襲ったペストを取り上げ，一般的な破局が起こったとき，人々がどのように振る舞うかを解明するために考察した．このペストの世界的流行は，当時のヨーロッパの人口 8500 万人の少なくとも 1/4 を殺し，黒死病と呼ばれ恐れられた．

この流行は，まず，黒海の港を出港した商船により 1347 年末にはジェノヴァとマルセーユにもたらされる．1348 年になると，1 月にアヴィニョン，4 月にはフィレンツェ，6 月にはイタリア全土を襲

い，フランスではボルドーまで達している．11月にはロンドン，その年の暮にはジュネーブを越えてドイツの街に侵入，翌1349年の暮には，ポーランド，北欧に達し，1351年にはロシアまで広がっている．この伝播状況を地図に表したもの[5)]から推定すると，およそ400 km/年から550 km/年でジェノヴァあたりを中心にほぼ等速度で伝播していることが読み取れる．その後も，ペストは10年かそれより短い間隔で流行を繰り返し，ヨーロッパが元の人口を回復するのは，ほぼ2世紀後のことである（文献2,6,7)を参照）．

Noble[8)]は，この中世ペストの伝播の反応拡散モデルを提案し，数値シミュレーションを行った．彼は，モデルに現れるパラメータの値を当時の文献から推定しモデル方程式のシミュレーションから伝播速度を求め，その値を約 $320 \sim 650$ km/年と算定した．この値は上記の実際の伝播速度とかなりよく一致していることが分かる．その後，感染症の伝播問題の反応拡散方程式系に基づく考察は，ペスト以外の感染症，例えば，ヨーロッパにおける狂犬病にも適用されることになる[9,10)]．次節では，そのモデル方程式を説明しよう．

3. 感染症伝播の数理モデル

ペストに限らず，感染症は一般に，(1) 少数の感染者が，未感染者の個体群に侵入し，感染症がその個体群に定着できるかどうか決まる初期段階，(2) 定着に成功した感染症が，その発生源から個体群中に流行していく遷移段階，(3) 感染症が個体群中に広がった最終段階，の3つの段階を経過する．これらの現象を取り扱う感染症伝播の数理モデルは，大きく分けて確率論的モデルと決定論的モデルがある．初期段階は確率論的要素が重要な役割を果たすことは容易に想像できるであろう．また，遷移段階は決定論的モデルで取り扱うことができるであろう．ここでは，発生した感染症が個体群に伝播していく遷移状態を対象とし，その伝播の速度と感染症の空間的分布を，決定論的モデルにより議論する．我々の取り上げるモデルは，現実の問題の直接的な解決を目指したものでなく非常に単純化されたモデルであり，空間的な拡散効果と感染のダイナミックスが感染症の伝播にどのような役割を果たすのかを理解するための理論的なモデルであることを注意しておく．

3.1 感染のダイナミックス

Kermack と McKendrick[11)]は，決定論的な感染症のダイナミックスを記述する数理モデルを提案し，その後の感染症の数理的な研究の基礎を築いた．彼らは，(i) 対象とする個体群は閉じている，すなわち，病気が感染する時間スケールでは新しい未感染者が個体群の中に流入することは無視できる，(ii) すべての個体は同等に感染する，(iii) 接触は質量作用の法則に従う，(iv) 感染者は病気に感染した結果，死亡するか完全な免疫を獲得するかにより感染状態でなくなる（したがって，再び病気にかかることはない），という前提の下で未感染者の個体群密度（単位面積あたりの個体数，以後混乱のない限り簡単に個体数と言う）に関する積分方程式モデルを考察し，その特別な場合として，次の常微分方程式系

$$\begin{cases} dS(t)/dt = -\beta S(t)I(t), \\ dI(t)/dt = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t), \\ dR(t)/dt = \gamma I(t) \end{cases} \qquad (1)$$

が導かれることを示した．ここで，$S(t), I(t), R(t)$ はそれぞれ，未感染者，感染者，完全な免疫を獲得するか死ぬかのいずれかで再び病気にかかることのない者（除去者，もしくは回復者と言う）の時刻 t での個体数である．

ここで，(1) の意味を見ておこう．仮定 (ii), (iii) より，感染者1人が接触する未感染者数は S であり，SI は感染者と未感染者の接触回数と考えられる．β は感染率，すなわち，単位時間あたり1回の接触により感染する確率だから，βSI は単位時間あたりに発生する感染者数である．したがって，最初の式が成り立つ．そして，感染者1人が単位時間あたりに再び病気にかかることのない状態になる確率が γ（回復率，あるいは除去率と呼ばれる）である．このことから，(1) が導かれる．もち

ろん，S, I, R はすべて個体数を表すから非負の値を持つ t の関数である．この系は通常 Kermack–McKendrick モデルもしくは SIR モデルと呼ばれ感染症モデルの中で最も基本的なモデルである．

3.2 感染症の空間伝播モデル

次に，対象とする個体群の空間移動をどのようにモデル化するかが問題となる．ここでは，各個体がそれぞれ独立に前後左右に等しい確率で移動するランダムウォークモデルに対応する線形拡散モデルを考える．その理由は，非常に理想的な状況では，現実を反映していることと数学的取扱いが可能なことによる．このとき，感染症の空間的な分布を考慮したモデル方程式として

$$\begin{cases} \partial S/\partial t = d_1\Delta S - \beta SI, \\ \partial I/\partial t = d_2\Delta I + \beta SI - \gamma I, \\ \partial R/\partial t = d_3\Delta R - \gamma I \end{cases} \quad (2)$$

が得られる．これが，決定論的連続モデルにおける，感染症の空間的伝播の基本モデルである．その他の空間移動を考慮した確率モデルや離散モデルについては文献 12, 13) 等を参照されたい．上式中，拡散係数 d_1, d_2, d_3 はすべて非負，Δ はラプラシアン，すなわち，$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ である．そして，S, I, R はすべて場所 $\boldsymbol{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$，時刻 $t \in (0, \infty)$ の関数である．ここで，$\mathbb{R}$ は実数全体 $(-\infty, \infty)$ を表し，$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ である．

(1) と同様, (2) においても，最初の 2 つの式は未知関数 $S(\boldsymbol{x}, t)$, $I(\boldsymbol{x}, t)$ に関して閉じており，いったん ,$I(\boldsymbol{x}, t)$ が求まると $R(\boldsymbol{x}, t)$ はその自然な初期条件 $R(\boldsymbol{x}, 0) = 0$ の下で第 3 式を解いて求めることができる．したがって，以後，(2) の第 3 式を除いて解析する．

(2) に対する初期条件として，

$$S(\boldsymbol{x}, 0) = S_0, \quad I(\boldsymbol{x}, 0) = I_0(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \quad (3)$$

を考える．ここで，S_0 は正定数，$I_0(\boldsymbol{x})$ はある適当な正の数 L に対して $I_0(\boldsymbol{x}) \equiv 0$ $(|\boldsymbol{x}| \geq L)$ を満たす連続な関数とする．このことは，(2) に基づいて，未感染者が空間に一様に存在する所に感染者が侵入した場合，感染症がどのように伝わるのかという問題を考えることになる．

3.3 進行波解と感染症の伝播速度

感染症が，空間を伝播する状態を表す解を考えよう．今，十分遠方に侵入した感染症が，未感染者が一様にいる個体群中を一定方向に一定速度 c で形を変えず波として伝わるとする．一定速度で伝わる方向を x 軸方向にとり，y 変数には依存しないと仮定する．正確に言うと，速度 c で動く動座標系 $z = x - ct$ で見ると時間によって変化しない (2) の解 $(S(x, y, t), I(x, y, t)) = (S(z), I(z))$ を考える．$S(x - ct), I(x - ct)$ をそれぞれ x, t で偏微分し (2) に代入すると，常微分方程式系

$$\begin{cases} d_1 S'' + cS' - \beta SI = 0, \\ d_2 I'' + cI' + (\beta S - \gamma)I = 0 \end{cases} \quad (4)$$

が得られる．ここで，$'$ は $z = x - ct \in \mathbb{R}$ に関する微分 $\frac{d}{dz}$ を表す．感染症の波の十分前方では，病気が侵入しておらず，未感染者だけが存在し，感染症の十分後方では，病気が通り過ぎて感染者はいないと考えられるから，(2) の境界条件として

$$(S, I)(-\infty) = (a, 0), \quad (S, I)(\infty) = (S_0, 0) \quad (5)$$

を考えるのは自然であろう．ここで，a は病気の通過後生き残った未感染者数であり，$a < S_0$ を満たす未知の非負の定数である．(4), (5) を満たす非負の値を取る関数の組 $(S(x - ct), I(x - ct))$ を (2) の進行波解と言う．

発見的議論により進行波解の速度 c を求めてみよう．感染症が侵入していく先端では $(S, I) = (S_0, 0)$ と考えられるから，(4) の第 2 式で $S = S_0$ と置くと $d_2 I'' + cI' + (\beta S_0 - \gamma)I = 0$ となる．この式は線形だから，解は $I(z) = ke^{\lambda z}$（k は定数）の形で求められる．これを代入すると，λ の満たすべき式 $d_2\lambda^2 + c\lambda + (\beta S_0 - \gamma) = 0$ が得られる．今，$I(z) \geq 0$ でなければならないから λ は実数でなければならない（複素数なら，解は $I = 0$ の周りを振動し負の値をとる）．したがって，

$$c \geq c^* \equiv 2\sqrt{d_2(\beta S_0 - \gamma)} \quad (6)$$

が成り立たなければならない．すなわち，(6) を満

たす任意の c に対して，(2) の進行波解が存在することが期待される．実際，そのことは厳密に証明されている[14,15]．また，単独方程式の場合と同様に，初期条件 (3) の下では，(2) の解は最小速度 c^* の進行波解に近づいていくと予想される．これは，次節の数値計算結果から正しいと思われるが，厳密な結果は得られていない．

以上の結果と予想が正しいとすると，感染症が空間的に伝播し流行するためには，

$$\gamma/(\beta S_0) < 1, \tag{7}$$

言い換えると，初期個体群密度 S_0 が流行の臨界個体群密度 $S_c = \gamma/\beta$ を超えていなければならない．同時に，感染者が拡散すること $(d_2 > 0)$ が必要であることが導かれる．

4. シミュレーションで伝播現象を視る

モデル方程式の初期値問題 (2), (3) のシミュレーションにより，感染症が空間をどのように伝播するか視てみよう．いずれの場合も，境界条件は各辺で完全反射条件をおいている．

まず，図 1 を見よう．領域は正方形領域 $D = [0, 200] \times [0, 200]$ で，係数は $d_1 = d_2 = 0.1$, $\beta = 1$, $\gamma = 0.1$ である．初期条件は，未感染者は，左半分に多く $S(x, y, 0) = 0.5 \ (0 \le x \le 100)$, 右半分に少し $S(x, y, 0) = 0.08 \ \ (100 < x \le 200)$ いるとし，感染者は原点中心半径 5 の範囲にのみ存在し $(I(x, y, 0) = 0.5,\ 0 \le x^2 + y^2 \le 25)$ それ以外では 0 としている．$S_0 = 0.5$ のとき，$c^* = 0.4$ であり左半分の領域では確かに $t = 200$ と $t = 400$ の間に約 80 ほどの距離を感染症の波（感染波）が進んでいることが分かる．それに対して，右半分では $S_0 = 0.08 < \gamma/\beta = 0.1$ であり進行波解が存在せず，この領域では，感染波が侵入できず消滅していることが示されている．

図 1 での拡散係数を $d_1 = d_2 = 0.05$, 初期条件で未感染者のみを $\Omega = \left\{(x, y) : \left(\frac{x-100}{50}\right)^2 + \left(\frac{y-200}{30}\right)^2 \le 1\right\}$ の範囲で $S(x, y, 0) = 1$, それ以外で $S(x, y, 0) = 0.3$ と変えて計算した結果が図 2

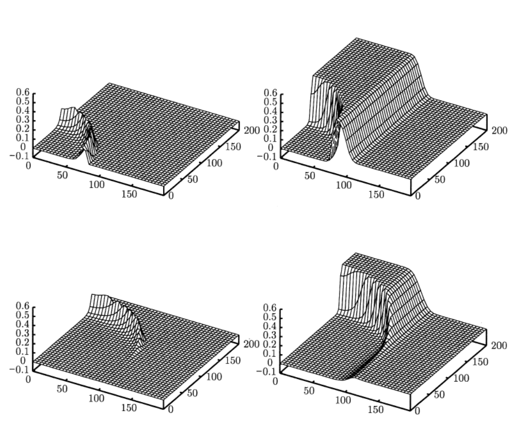


図 1　感染波の伝播と消滅. 左側が感染者 $I(x, y, t)$, 右側が未感染者 $S(x, y, t)$ である．上からそれぞれ $t = 200$, 400 である．

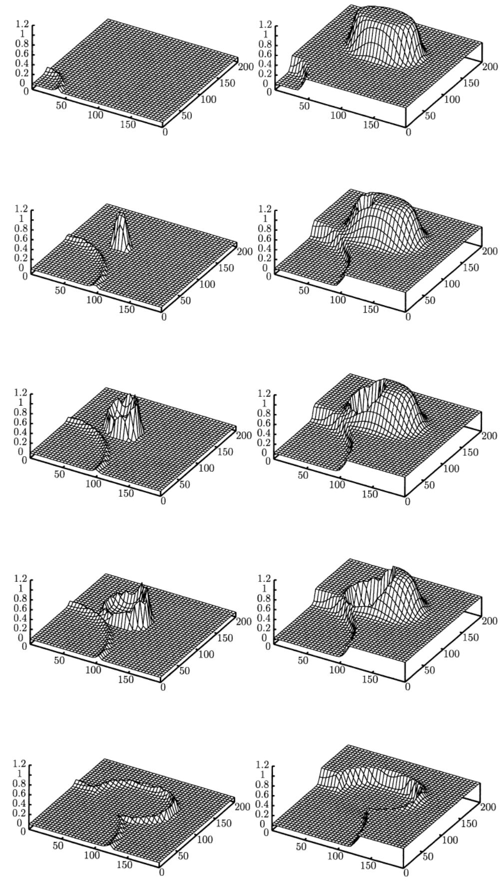


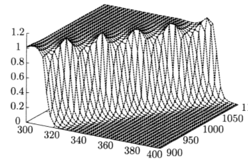
図 2　人口密集地を通過する感染波．左側が感染者，右側が未感染者，上からそれぞれ $t = 200$, 490, 510, 530, 620, である．

である．すなわち，領域 Ω が都市（人口密集地）で周りは比較的人口密度の高くない郊外に病気が侵入した状況と考えればよい．$S_0 = 1$ のとき，$c^* \approx 0.42$, $S_0 = 0.3$ のとき，$c^* = 0.2$ でいずれの場合にも進行波解が存在する．まず，郊外を一定速度で伝播していた感染症が，その波とは離れた都市の人口が密集している所で新しく流行の中心を形成し，新たなより大きな速度の速い感染波が伝播していく．そして，都市全体を襲った後再び最初と同じ波形の感染波となり，最初の波とともにその他の領域に伝わっていく．最後の S の図では，分かりにくいが，感染症の通過後，人口が集中していたところのほうが生き残った人が少なくなっている．

以上のシミュレーションの結果から理解されるように，(2) に基づくと，感染症の伝播にとって鍵となる条件は (7) であり，人口の集中する都市化は感染症が流行するのに非常に好都合な状態であることが結論として得られる．

5. おわりに

前節まで，感染率 β が定数の場合だけを考えてきたが，β が S や I に依存する非線形感染率モデルも提案されている[16]．感染率 β の関数形が感染症の伝播モデルにおいて本質的であることを見るために，主として数学的興味から行った $\beta = \beta_0 I^7$ の場合のシミュレーション結果を示して終わる．パラメータの値は $d_1 = 1, d_2 = 0.01, \beta_0 = 1, \gamma = 0$ である．図 3 の左図は縦軸が $I(x,t)$ の値で，横軸が x，奥行き方向の軸が t で，$(x,t) \in [300,400] \times [900,1100]$ の範囲のみを描いた図である．右図は各 t に対して $S(x,t) = 0.5$ となる位置 $x(t)$ の速度 $dx(t)/dt$ を縦軸に，時間軸を横軸としてプロットしたものである．この場合，一定速度の波ではなく，速くなったり遅くなったり振動しながら動く波が新しく現れる．紙面の都合上これ以上説明できないが，これらの分岐現象はすでに知られている事実であり，その解析は今後の課題である．



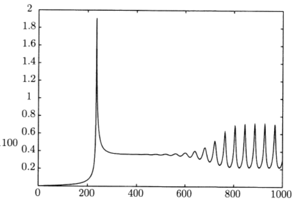


図 3　非線形感染率モデルの感染波．左：感染者 $I(x,t)$ の波形．右：感染波の速度．

最後に，数値計算と結果の gnuplot による表示を手伝ってくれた現在京都産業大学研修員である大庫英介君に謝意を表する．

参考文献

1) 岡田晴恵・田代眞人：『感染症とたたかう』，岩波新書 (2003).
2) 岡田晴恵：『人類 vs 感染症』，岩波書店 (2004).
3) 山本太郎：『新型インフルエンザ』，岩波新書 (2006).
4) アルフレッド・W・クロスビー著，西村秀一訳：『史上最悪のインフルエンザ』，みすず書房 (2004).
5) Langer, W.L., The black death, *Scient. Am*, **210** (1964), 114–121.
6) 村上陽一郎：『ペスト大流行』，岩波新書 (1983).
7) 岡田晴恵：『感染症は世界史を動かす』，ちくま新書 (2006).
8) Noble J.V., Geographic and temporal development of plagues, *Nature* **250**, **9** (1974), 726–729.
9) Källén, A., Arcuri, P. and Murray, J.D., A simple model for the spatial spread and control of rabies, *J. Theoret. Biol.*, **116** (1985), 377–393.
10) Murray, J.D., Stanley, E.A. and Brown, D.L., On the spatial spread of rabies among foxes, *Proceedings of Royal Soc. Lond.*, **B 229** (1986), 111–150.
11) Kermack W.O. and McKendrick, A.G., Contributions to the mathematical theory of epidemics, *Proc. Roy. Soc. A*, **115** (1927), 700–721.
12) Newman, M.E.J., Spread of epidemic disease on networks, *Physical Review E*, **66**, 016128 (2002).
13) Durret, R., Stochastic Spatial Models, *SIAM Review*, **41** (1999), 677–718.
14) Källén, A., Thresholds and travelling waves in an epidemic model for rabies, *Nonlinear Analysis, TMA*, **8** (1984), 851–856.
15) Hosono, Y. and Ilyas, B., Traveling waves for a simple diffusive epidemic model, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **5** (1995), 935–966.
16) Korobeinikov, A. and Maini, P.K., A Lyapunov function and global properties for SIR and SEIR epidemiological models with nonlinear incidence, *Math. Biosci. Engineering*, **1** (2004), 57–60.

（ほその・ゆうぞう，京都産業大学工学部）

3次元チューリングパターン

昌子 浩登・太田 隆夫

1. はじめに

生体の微細構造は，人類の最先端技術をはるかに凌駕する機能をもっている．細胞膜に埋め込まれているイオンチャネルや分子モーターは10ナノメータ（髪の毛の太さの5千分の1）程度の大きさであり，熱雑音にさらされているにも関わらず，非常な精度と効率で機能を発揮する．動きのない構造でも驚異的なものがある．その一つが蝶や甲虫のきれいな光沢をもつ翅の起原である．例えば，南米の熱帯雨林に生息するマエモンジャコウアゲハという蝶は，翅の表面に並んだ鱗粉の直下に光の波長と同じ数百ナノメータのオーダーの周期をもつ3次元ネットワーク構造が整然と形成されている．この構造のために緑色の光のみが反射され，他の色の光を遮断することで，この蝶特有の緑色の光沢を得ている．その結果，保護色として周りの風景に同化している[1]．この例のみならず，細胞内小器官，例えば，ミトコンドリア内にも微小スケールの周期ネットワーク構造が存在することが報告されている[2]．

結晶構造から，動物体表の縞模様，砂漠の風紋まで，自然界には多様な周期構造が存在する．これらの構造を形成するメカニズムを探るのは重要な研究課題であり，現在でも活発な研究が行われている．結晶構造については，ご存じのように，それを構成する原子や分子間相互作用にその起原がある．

周期構造形成のもう一つの機構は，本稿の主題であるチューリング不安定性であり[3]，1次元，2次元系に対しては多くの理論的研究がある．また，化学反応系でチューリングパターンが実現されており[4,5]，動物の縞模様もチューリングパターンであるとの観察もあるが[6]これらは本質的に2次元パターンである．3次元系では理論的研究も実験的研究もほとんど行われていないのが現状である．本稿では3次元チューリングパターンとしての「3次元周期ネットワーク構造」の最近の理論的研究[7]を平易に紹介する．

2. チューリング不安定性

暗号解読やコンピュータの基礎原理の提案で有名なイギリスの数学者であるアラン・チューリングは1952年に周期構造形成の数学的メカニズムの一つとして，以下のことを提案した[3]．2変数の連立偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_u \nabla^2 u + f(u,v), \qquad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D_v \nabla^2 v + g(u,v) \qquad (2)$$

を考える．それぞれの第1項は拡散項であり，D_u, D_v は拡散係数である．u と v の多項式である $f(u,v)$ と $g(u,v)$ は反応項とよばれる．この形の方程式を反応拡散方程式という．チューリングは拡散係数の比が充分大きく反応項がある条件を満

たせば，方程式 (1), (2) は空間的に非一様な周期解が安定に存在できることを示した．

具体的に $f(u,v)$, $g(u,v)$ が次の形であるとしてチューリングの予言を見ていこう．

$$f(u,v) = u(1-u^2) - v, \tag{3}$$

$$g(u,v) = \gamma(u - \alpha v - \beta). \tag{4}$$

α, β, γ は正の定数である．変数 u は非線形反応項 u^3 をもち，u の存在は v を増加させ，変数 v は u を減らそうと作用する．そのため，u を活性化因子，v を抑制因子という．

$f(\bar{u},\bar{v}) = 0$, $g(\bar{u},\bar{v}) = 0$ を満たす時間空間変化しない解 $\bar{u}$, $\bar{v}$ は唯一つであるとする．$u = \bar{u} + a\exp(\lambda t + iqx)$, $v = \bar{v} + b\exp(\lambda t + iqx)$ を (1) と (2) に代入し，a と b に関して 1 次まで残すと

$$\lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q^2 D_u + f_u & f_v \\ g_u & -q^2 D_v + g_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{5}$$

を得る．ここで f_u, f_v, g_u, g_v は，f, g の u, v に関する $(\bar{u},\bar{v})$ での偏微分係数である．波数 q は空間の変調を表すパラメータである．(5) が $a \neq 0$, $b \neq 0$ の解をもつためには

$$\lambda^2 + A(q)\lambda + B(q) = 0 \tag{6}$$

でなければならない．ここに，

$$A(q) = q^2(D_u + D_v) - f_u - g_v, \tag{7}$$

$$B(q) = D_u D_v q^4 - q^2(D_u g_v + D_v f_u) + f_u g_v - f_v g_u \tag{8}$$

である．方程式 (1), (2) の拡散項がない場合の時間変化しない解の線形安定性は式 (6) で $q = 0$ とすればよい．すなわち，

$$\lambda^2 - (f_u + g_v)\lambda + f_u g_v - f_v g_u = 0. \tag{9}$$

ここでは 2 次方程式 (9) の解が共に負，つまり $f_u + g_v < 0$ と $f_u g_v - f_v g_u > 0$ を満たすとする．

(6) の固有値 λ の一つが正になる条件，すなわち不安定性の十分条件は $B(q) < 0$ である．上に述べた不等式から，u の拡散係数 D_u の値を小さくしていくと，ある有限の q で $B(q)$ が負になることが (8) からわかる．実際，$B(q)$ を q で微分すると最小値を与える q は，

$${q_c}^2 = \frac{D_u g_v + D_v f_u}{2 D_u D_v} \tag{10}$$

であり，そのときの B の値は，

$$B(q_c) = -\frac{(D_u g_v + D_v f_u)^2}{4 D_u D_v} + f_u g_v - f_v g_u. \tag{11}$$

これから，D_u が十分小さいとき $B(q_c) < 0$ となることがわかる．このように，2 つの変数 u と v の拡散係数の値が大きく異なっているとき，一様解は有限の波数をもった変調に対して不安定である．これを拡散誘導不安定性あるいはチューリング不安定性という．

上の解析は定常解の線形安定性であって，一様解が不安定化したあと，どのような解が出現するかは非線形性を取り込んだ解析が必要である．しかし，方程式 (1) と (2) を数値的に解けば，何が起こるかを，厳密ではないにしても，確認することができる．図 1 はそのようにして得られた 2 次元での時間変化しない周期解である．系の境界では周期境界条件を課している．

チューリング不安定性は予言から 40 年近く経った 1990 年になって初めて実際の化学反応系で図 1 のようなパターンを観察できるようになった[4,5]．

3. 共連結周期構造

2 次元チューリングパターンは図 1 の縞模様と水玉模様が基本である．それ以外の複雑な構造は，本質的にこの二つの変形版と言える．実際，2 次元以下のチューリング構造については，大規模数値シミュレーションを含む多くの理論的研究が行われている．

しかし，3 次元では 2 次元以下では存在しない新たな構造があることに注意したい．図 2 は P-surface とよばれる周期構造である[8]．形は本質的

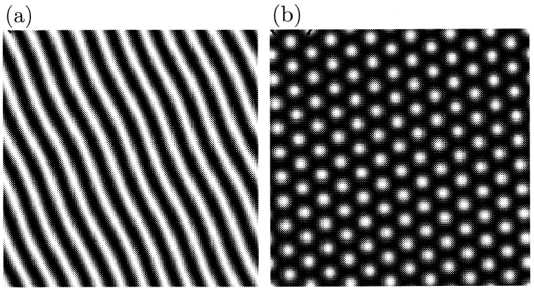


図1　方程式 (1) と (2) の2次元数値シミュレーションで得られたチューリングパターン．黒いところが u が $\bar{u}$ より大，白いところが u が $\bar{u}$ より小を表す．(a) 縞パターン（$\beta = 0.00$），(b) 水玉パターン（$\beta = 0.08$）．他のパラメータは，図 4 以降の 3 次元での計算と同じ．

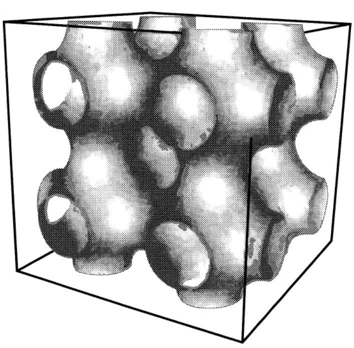


図2　P-surface.

にジャングルジムと同じである．円筒形のドメインが6個交差して周期構造を作っている．円筒内の1点から円筒内をたどって空間の端から端まで行くことができるし，また，円筒外の1点から円筒を横切ることなく，空間の端から端まで行くことができる．このような構造を共連結構造という．図1の縞模様や水玉模様の白い領域をたどって任意の場所に移動することはできない．このことから共連結構造は3次元特有の構造であることが理解できる．

P-surface のもう一つの特徴は円筒形の表面の平均曲率が至る所ゼロであることである．平均曲率 H とは，表面の曲率半径 R_1, R_2 によって $H = (1/R_1) + (1/R_2)$ と定義される．平均曲率ゼロ（$R_2 = -R_1$）の面を極小曲面という．適当な形に折り曲げて作った針金の輪に張った石けん膜は至る所平均曲率ゼロである．つまり，極小曲面は，ある拘束のもとで，表面積最小の曲面のことである．周期的な極小曲面が何種類あるかは数学的に未解決のようである．

4. 3次元数値シミュレーション

ここでは，極小曲面をもつ共連結周期構造が3次元チューリング構造として存在するかという問題を設定しよう．そのために反応拡散方程式 (1) と (2) を 3 次元で数値シミュレーションを行う．偏微分方程式を解くためには，空間を小さなセルに分け，u と v の初期時刻での各セルでの値と計算領域の境界での条件（境界条件）が必要である．境界条件は，すでに図1で述べてあるが，周期境界条件を課す．つまり，L を立方形の計算領域のサイズとして $u(x+L, y+L, z+L) = u(x, y, z)$（$v$ についても同様）とおく．

2次元系では図1のように縞模様や水玉模様の周期よりも計算領域 L を十分大きくとった数値計算が容易に行える．しかし，3次元では，私たちの計算環境では巨大なサイズの数値計算を精密に行うのが困難である．そのため，系の大きさを周期構造と同じにして数値シミュレーションを行った．非線形方程式 (1) と (2) の周期解の周期は，あらかじめ正確に得るのは一般に不可能である．したがって，数値計算においては系のサイズ L を調節しながら，同じパラメータで何度も数値計算を実行し，周期解の周期を推測しなければならない．

もう一つの技術的問題は，同じパラメータでも複数の周期解をもつことである．可能な解をできるだけ多く数値的に得るには準安定な解にトラップされるのを防ぐ必要があり，初期条件に乱数で乱雑なノイズを与え，また，計算ステップ毎にも微小なノイズを加えて準安定解から抜け出せるようにしている．

方程式の定数を $D_u = 5.0 \times 10^{-5}$, $D_v = 5.0 \times 10^{-3}$, $\alpha = 0.5$, $\gamma = 26.0$ に固定し，β の値を変えたときどのような周期解が現れるかを調べた．すると，図 3 に示すように LM, SG, SD, DG, Fd, PL, H, Fc, B の 9 つの周期解が得られ

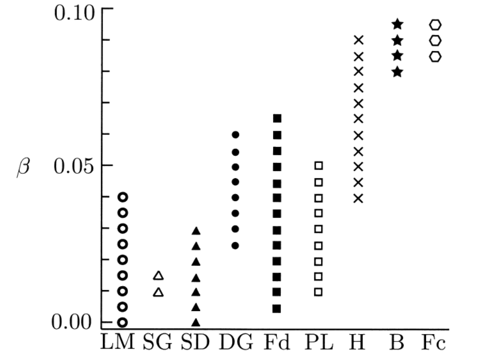


図 3 $\gamma = 26$ に固定し，パラメータ β（縦軸）を変化させたとき得られた構造．LM はラメラ構造，H は三角格子構造，B は BCC 構造，Fc は FCC 構造である．これら以外は本文中に述べる．

た．例えば，$\beta = 0.04$ では，初期分布と空間サイズ L によっては，LM, DG, Fd, PL, H の異なる 5 種類のパターンが得られたことを示している．9 つの周期解のうち，LM, H, B, Fc はそれぞれ図 1 のパターンを 3 次元に拡張した構造である．つまり，LM は，図 1 (a) の縞模様の 3 次元版であるサンドイッチ構造．H は，図 1 (b) の水玉が円柱になったヘキサゴナルシリンダー構造．そして，B と Fc は，球が規則的に並んだ体心立方（BCC）構造と面心立方（FCC）構造である．しかし，その他の構造（DG, SG, SD, Fd, PL）は，これまで報告されていない 3 次元特有のネットワーク構造である．

5. ダブルジャイロイド構造

まず，図 3 の DG パターンについて考える．図 4 は，$\beta = 0.04$ におけるパターンの時間発展を示している．(a)–(d) は各時刻における u の等高面を表示している．図 4 (a) のランダムな初期分布から出発して，時間が経つと図 4 (b), (c) のようにドメインが成長する．その後，図 4 (d) の秩序のある周期パターンに落ち着く．なお，u と v の空間変化は三角関数的ななだらかな変化である．

このパターンがどのような構造であるかを調べるため，u の数値データをフーリエ変換する．例えば，縞模様は，一番簡単な場合，A を振幅，Q を波数として $u(x,y,z) = A\cos(Qx)$ と表現され，そのフーリエ変換は

$$\hat{u}(\vec{k}) = \int d\vec{k}\, u(\vec{r}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \frac{A}{2}\Big(\delta(k_x - Q) + \delta(k_x + Q)\Big)\delta(k_y)\delta(k_z) \qquad (12)$$

である．実際には系の大きさが有限なのでデルタ関数ではなく有限の大きさのピークが $\vec{k} = (\pm Q, 0, 0)$ に現れる．このように強度 $|\hat{u}(\vec{k})|^2$ を波数空間に表示することにより，その構造の特徴が浮かび上がる．

図 4 (e) は，図 4 (d) の $u(\vec{r})$ をフーリエ変換し，原点を中心にしてピーク位置をプロットし，ピーク強度 $|\hat{u}(\vec{k})|^2$ を球の相対的な大きさで表したものである．ただし，原点のピークと，強度が 10^{-3} 以下のピークは省略してある．このパターンは 18 個のフーリエモードで構成され，そのピークは原点を中心とした立方体面上に並んでいる構造であることがわかる．

3 次元極小曲面の例を図 2 で示したが，もう一つの例であるダブルジャイロイドと呼ばれる構造は，近似的に

$$\begin{aligned} 0 = {} & 8(1-\eta)[\sin 2x \sin z \cos y \\ & + \sin 2y \sin x \cos z + \sin 2z \sin y \cos x] \\ & - 4\eta[\cos 2x \cos 2y + \cos 2y \cos 2z \\ & + \cos 2z \cos 2x] - \zeta, \end{aligned} \qquad (13)$$

で表される[9]．ここで，η や ζ は定数である．大変興味深いことは，図 4 (e) のフーリエピークは式 (13) で表現される構造のフーリエ変換と一致することである．このことから得られたパターン DG はダブルジャイロイド構造だと結論できる．ただし，図 4 (d) の面の平均曲率は十分小さいけれども，厳密にゼロではない．

同じように，図 3 の SG と SD を調べるとそれぞれ，図 5 と図 6 のようになり，前者はシングルジャイロイド構造，後者はダイアモンド構造であることがわかる．これらも近似的な極小曲面の立

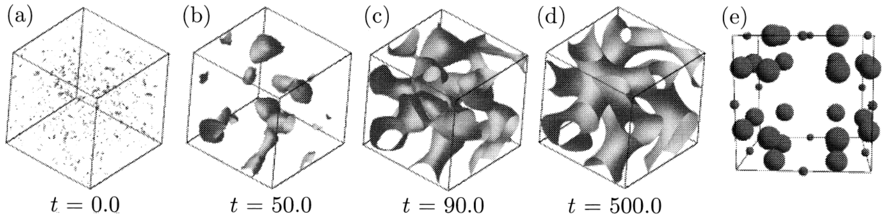


図 4 $\beta = 0.04$ におけるダブルジャイロイド構造の形成過程．(a)–(d)：各時刻の u の等高面を表示（図 5(a)–図 8(a) も同様）．(e)：(d) の構造のフーリエピーク（図 5(b)–図 8(b) も同様）．

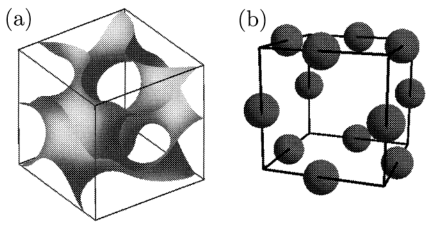


図 5 $\beta = 0.01$ におけるシングルジャイロイド構造．

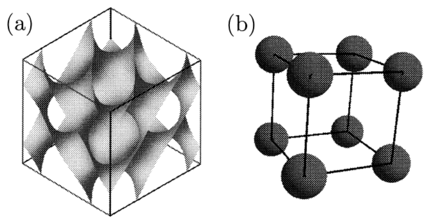


図 6 $\beta = 0.01$ におけるダイアモンド構造．

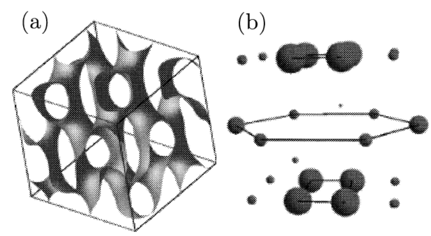


図 7 $\beta = 0.04$ における Fddd の対称性をもつ構造．

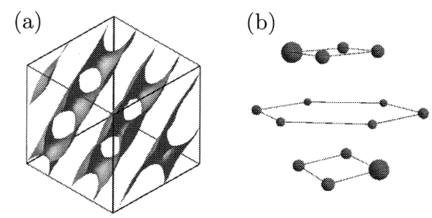


図 8 $\beta = 0.04$ における穴あきラメラ構造．

方対称性をもつ共連結周期構造である．

残った Fd と PL は図 7，図 8 に示してある．図 7 は Fddd という対称性をもつ構造であり，共連結構造ではあるが極小曲面ではないし，立方対称性ももっていない．図 8 はサンドイッチ構造であるが，サンドイッチを構成するそれぞれの面に穴があいており，穴あきラメラ構造とよばれる．これは共連結構造ではない．

6. 構造安定性解析

図 3 で示したように，パラメータを固定しても初期条件を変えると周期解が複数個得られる．そのうち，どのパターンが最も安定かという問いに答えるのは簡単でない．もし，方程式 (1) と (2) が変分関数をもてば，その極値をもつ解が最安定であると結論できる．ここではそのような状況を考察する．

D_v が D_u に比べて非常に大きく，また v の反応速度 γ が非常に大きいとき，v は u に比べて十分速く緩和するため，$\partial v/\partial t = 0$ とおくことが正当化される．その結果 v が u の関数として求まり，それを (1) に代入すると，

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\delta F}{\delta u} \tag{14}$$

となる．ここに，

$$F\{u\} = \int d\vec{r} \left[\frac{D_u}{2}(\vec{\nabla} u)^2 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{4} \right] + \frac{\gamma}{2D_v} \int d\vec{r} \int d\vec{r}\,' G(\vec{r}, \vec{r}\,') \Big(u(\vec{r}, t) - \beta \Big) \times \Big(u(\vec{r}\,', t) - \beta \Big), \tag{15}$$

グリーン関数 $G(\vec{r}, \vec{r}\,')$ は

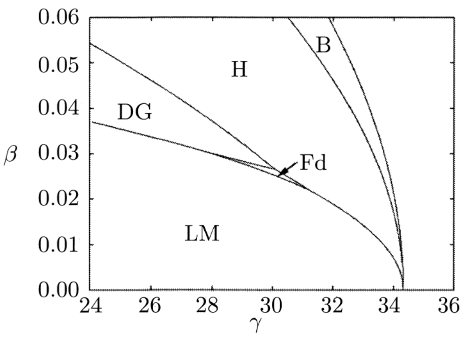


図 9 $\gamma - \beta$ 平面上の最も安定な構造の相図.

$$\left(-\nabla^2 + \frac{\alpha\gamma}{D_v}\right) G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (16)$$

で定義される.

この F は下に有界であり変分関数となる. すなわち,

$$\frac{dF}{dt} = \int d\vec{r}\, \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\delta F}{\delta u} = -\int d\vec{r} \left(\frac{\delta F}{\delta u}\right)^2 \leq 0 \quad (17)$$

を満たすから, F は時間の単調減少関数である. つまり, F の最小値が時間変化しない最安定の解である.

そのようにして得られた相図が図 9 である. ダブルジャイロイド構造と Fddd 構造は存在するが, その他の共連結構造は最安定構造としては存在し得ないことがわかる. $\gamma = 26.0$ で β を増加していくと, ラメラ解 (LM), ダブルジャイロイド解 (DG), ヘキサゴナル解 (H), BCC 解 (B) の順番で安定構造が現れる. この遷移は, 図 3 に示したパターンの出現傾向と整合性がある.

7. おわりに

連立反応拡散方程式 (1) と (2) の 3 次元チューリングパターンとして, 近似的に極小曲面をもつ共連結構造が出現することを解説した. 本稿では, 反応項が (3) と (4) で与えられる場合を詳しく述べたが極小曲面をもつ共連結構造はこの反応拡散方程式だけではなく, 他の反応項をもつ系, Brusselator[10] や Gray–Scott モデル[11] でも現れることを確認してある[7].

それほど複雑でない反応拡散方程式 (1) と (2) にも関わらず, その解として近似的に極小曲面をもつ様々な共連結構造が存在することは, 私たちにとって予想外であった. 今のところその構造形成メカニズムを一言で言い表すまでに理解が進んでいない. さらに, 最も簡単であると思える図 2 の P-surface は解として見つかっていないことも不思議である.

3 次元チューリングパターンは偏微分方程式の解と極小曲面という微分幾何を結びつけるという意味で数学的に興味深い. 我が国では応用数学者たちによる反応拡散系の世界をリードする研究実績がある. 現在のところ, 1 次元, 2 次元系を中心に研究が行われているようであるが, 本稿が刺激となって 3 次元チューリングパターンの数学的進展が起こることを期待する.

一方では, 材料科学におけるナノ構造形成への応用や, 生体組織の微細構造の形成機構と関連し, 今後の発展が待たれるところである.

参考文献

1) P. Forbers, *The Gecko's Foot: Bio-inspiration Engineered from Nature* (HarperCollins Published, England, 2005).
2) T. Landh, *FEBS Letters* **369**, 13 (1995).
3) A.M. Turing, *Philos. Trans. R. Soc. London B* **237**, 37 (1952).
4) V. Castets, E. Dulos, J. Boissonade, and P. De Kepper, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2953 (1990).
5) Q. Ouyang and H.L. Swinney, *Nature* **352**, 610 (1991).
6) S. Kondo and R. Asai, *Nature* **376**, 765 (1995).
7) H. Shoji, K. Yamada and T. Ohta, *Phys. Rev. E* **72**, 65202(R) (2005); H. Shoji, K. Yamada, D. Ueyama and T. Ohta, *Phys. Rev. E* **75**, 46212 (2007).
8) A.D. Benedicto and D.F. O'Brien, *Macromolecules*, **30**, 3395 (1997).
9) A. Aksimetiev, M. Fialkowski, and R. Holyst, *Adv. Chem. Phys.* **121**, 141 (2002).
10) I. Prigogine and R. Lefever, *J. Chem. Phys.* **48**, 1695 (1968).
11) P. Gray and S.K. Scott, *Chem. Eng. Sci.* **38**, 29 (1983).

(しょうじ・ひろと, 京都府立医科大学大学院医学研究科)
(おおた・たかお, 京都大学大学院理学研究科)

複雑な解構造を視る

上山 大信

1. はじめに

皆さんは「複雑」という言葉に何を連想されるでしょうか？「人間関係が複雑」なんてよく聞きますね.「手続きが複雑で…」という愚痴も聞こえてきます. 複雑という言葉は，どちらかというとネガティブなイメージがあるようです. 我々は物事を「単純」なものとして捉えたいと考える傾向があります. なぜなら，単純なものは理解可能だからです. 複雑なものは，その複雑さゆえの魅力がありますが，簡単には理解できません. 話が上手と言われる人は大抵「たとえ話」をさりげなく用います. たとえ話は，説明対象となる事柄が複雑で理解し難いとき，その事柄の本質を兼ね備えたより単純な事柄を引き合いに説明することと言えるでしょう. これは科学の基本に通じるものがあります. 科学の一つのスタイルは「複雑」な事柄を本質を失わない，より「単純」な事柄で置き換え，それを深く視ることで元の「複雑」な事柄に対する理解を得ようとするものだと考えます.

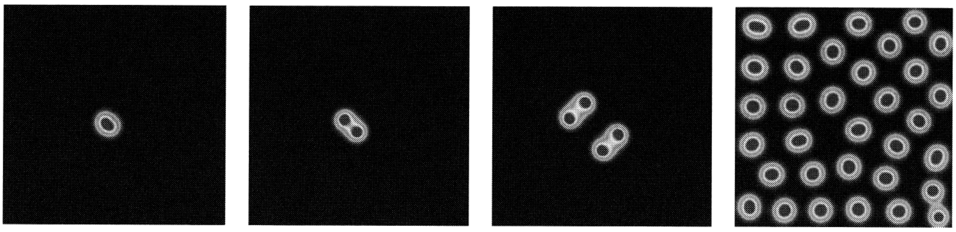
ここでは，一見捉え所のないようなパターン，「途中パターン」の一例を紹介します. 一時的に現れるそのパターンの魅力は生き生きとした動きにありますが，それが一見単純な微分方程式の解として現れるのです. ここでは，そのような動きの出自を偏微分方程式の「解構造」に見出す試みを紹介しましょう. 魅力的なパターンの背後に，複雑ですが美しい構造が潜んでいることが見出されます.

2. 自己複製パターン

まずは図 1 をご覧ください. 何の図に見えますか？ ある種の生物の増殖でしょうか？ 生き生きとしたものを感じます. 実は，これらの図はある種の反応拡散方程式と呼ばれる偏微分方程式をコンピューターを用いて解いた結果を可視化したものです[13]. その方程式とはグレイ・スコットモデル[4]と呼ばれる次の方程式です.

$$\begin{cases} u_t = D_u \triangle u + u^2 v - (F+k)u, \\ v_t = D_v \triangle v - u^2 v + F(1-v). \end{cases} \qquad (1)$$

ここで $\triangle$ はラプラシアンと呼ばれる微分作用素で，空間 1 次元であれば $\triangle = \partial^2/\partial x^2$ となります. また，F, k はそれぞれ正のパラメーターです. この反応拡散方程式を，2 次元有界領域で適切なパラメーターを用いてシミュレーションした結果が図 1 です. ピアソン[1]は (1) のコンピューターシミュレーションを様々なパラメーターを用いて行い，比較的簡単な反応拡散方程式である (1) から，図 1 に紹介した自己複製パターンと呼ばれるパターンを含む様々な複雑時空間パターンが得られることを発見しました. パラメーターを少し変更すると，図 1 とは一見異質のパターンが得られ，そのシミュレーション結果を眺めているだけでも十分楽しむことができます. この方程式は，ある種の化学反応と関係がありますが，現実の化学反応の複雑さからすれば，極端に簡単化されている



(a) (b) (c) (d)

図 1 2次元グレイ・スコットモデル (1) の数値シミュレーション例．(a)–(d) の順に時間発展する．一つのスポットが次々に分裂し，領域を埋め尽くす様子が見られ，自己複製パターンと呼ばれる[13]．

方程式ですが，化学反応系でも同じく自己複製パターンが観察されており，それらの関係にも興味が持たれています[2,3]．

さて，図 1 に見られる自己複製パターンは大変魅力的なパターンですが，そのメカニズムを調べてやろうと思い立つと，少々やっかいなことに気がつきます．それは，この自己複製パターンが一時的に見られる「途中パターン」であるということです．

3. 途中パターンとしての自己複製プロセス

「途中パターン」というのは，ある安定な状態から異なる安定な状態に至る途中に一時的に見られるパターンのことを言い，もう少し格好良く「遷移パターン」と呼ぶこともあります．それでは実際に，自己複製パターンを観察してみましょう．図 1 (a) にはスポットが一つ存在します．実は，この方程式では何もない一様状態，すなわち図 1 (a) からスポットを取り除いた，真っ青な状態がパラメーターによらず安定な状態です (状態 A)．パラメーターが適切である場合，そこに，スポット状の初期状態を与えて初めて自己複製プロセスが開始され，自己複製パターンを観察することができます．また，最終状態は領域がスポットで満たされた図 1 (d) の状態であり，これも安定な状態です (状態 B)[*1]．すなわち，自己複製パターンは，安定な状態に一定の大きさの摂動を加えたとき，最終的に他の安定な状態に至る途中に見られるパターンであると言えます．しかも，特徴としてパルスの分裂，すなわち自己複製プロセスを経て，徐々に最終状態に至るパターンであると言えるでしょう．

安定な定常状態である上記（状態 A）と（状態 B）は，定常解として捉えられるものです．もちろん，偏微分方程式の定常解ですから解析的に厳密解が求まることは期待薄でしょうが，計算機を駆使した数値解であれば得ることができますし，その大域的な解構造も得ることができるかもしれません．しかし，自己複製パターンという「途中パターン」はどのようにすれば捉えることができるでしょうか？ 実は，先に可能と言った，定常解の大域的な解構造をコンピューターを使って得た後，表題にあるように「複雑な解構造」を視ることによって，自己複製パターンの駆動原理を知ることができるのです[6,7]．

4. コンピューターが描き出す複雑な解構造

前節で紹介した自己複製パターンは，空間 2 次元シミュレーションの結果でした．実は，(1) を空間 1 次元において適切なパラメーターを用いてシミュレーションを行うと，図 2 に見られるような自己複製パルスパターンが観察されます．もちろん，このパターンは空間 1 次元問題の解であって，

*1） グレイ・スコットモデルの場合，最終状態の安定性はパラメーターに依存します．パラメーターによっては最終状態が不安定であり，複雑な時空パターンが生じる場合があります[7]．

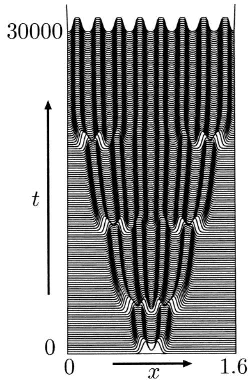


図 2 1 次元グレイ・スコットモデルに見られる自己複製パターン．$u(x,t)$ の鳥瞰図表示．$D_u = 10^{-5}$, $D_v = 2 \times 10^{-5}$, $F = 0.04$, $k = 0.06075$, $L = 1.6$.

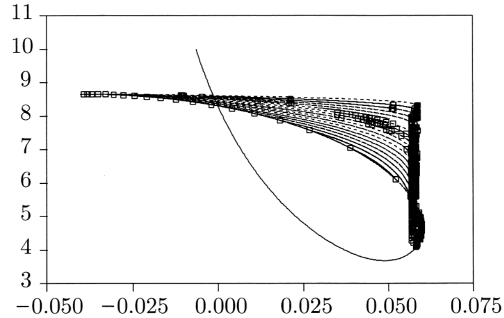


図 3 グレイ・スコットモデルの複雑解構造．$F = 0.04$, $L = 1$ とし，k を分岐パラメーターとした場合に AUTO がはき出した解構造．この中に情報が？

空間 2 次元問題の解である自己複製パターンと異なります．しかしながら，一つの個であるパルスが，次々と分裂し，最終的に空間を満たすという意味では同じものであると言えるでしょう．ここでは空間 1 次元問題について考察することで，「途中パターン」である自己複製パターンを理解することにしましょう．

さて，この特徴的な自己複製パルスパターンは，適当なパラメーター領域で観察され，適切にパラメーターを設定すれば，一つ一つのパルス分裂に要する時間を長くとることができることが複数の数値シミュレーション結果からわかります．また，パラメーターをさらに動かすと，安定な定常パルスパターンが得られることも分かりました．これらの事実は，定常パルス解と自己複製パルスという「途中パターン」の間に深い関係があることを示唆しています．

そこで，(1) に対して空間離散化を施した常微分方程式系の解構造を，AUTO[5)] を用いて調べることにしましょう．分岐解析ソフトウェア AUTO は，E.J. Doedel 等によって開発され，現在も開発が続けられているソフトウェアで，常微分方程式系の定常解，時間周期解の分岐解析や，常微分方程式の境界値問題の解の追跡が可能です．ここでは，AUTO を偏微分方程式を差分法で空間離散化を行った常微分方程式系に適用し，定常解の大域的な解構造を得ることにします．その結果得られたものは，図 3 に示すような，まさにスパゲッティーのような複雑な解構造です．図中の各線は，(1) の定常解を表しています．コンピューターの進歩によって，手軽にこのような複雑な解構造を知ることができるようになりましたが，果たしてこの図から我々が知りたいと思っている自己複製パルスパターンに関して，何か有用な情報が得られるのでしょうか？ 適切な目でこの複雑な解構造を視るならば答えはイエスです．

5. 複雑な解構造を視る

前節の図 3 は，何だか複雑ではあるのだけれども，この中に自己複製パターンの駆動メカニズム解明へのヒントがあるのでしょうか？ つまり，パルスが自己複製を繰り返しながら最終状態に向かう必然性を，この複雑な解構造から読み解くことができるのでしょうか？ 図 3 を求めるときに用いた $L = 1$ というパラメーターは，1 山のパルスからスタートして，最終的に 4 山のパルスができあがる程度の領域の広さとなっています．ここでは，1 山が 2 山に分裂する様子を観察できるぎりぎりの領域幅である $L = 0.3$ に設定し，しかも関係がないと思われる線を大胆に取り去ることによって，有用な情報の引き出しに挑戦します．

図 4 下の 2 つの図は，そのようにして情報の引

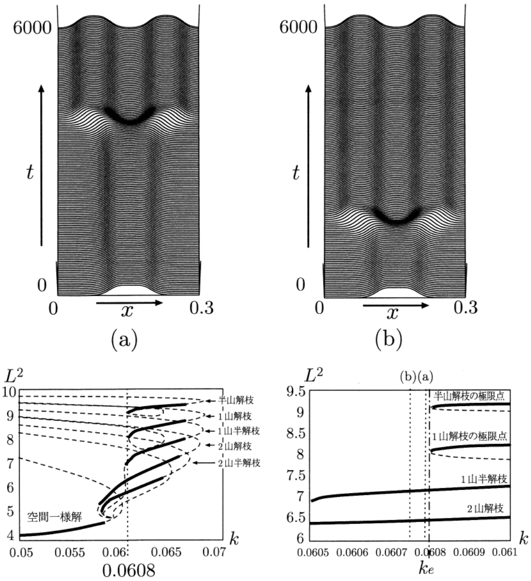


図 4　グレイ・スコットモデルにおけるサドル・ノード分岐点の整列構造とその余韻．下の 2 つの図は，$F = 0.04$, $L = 0.3$ とした場合に AUTO を用いて得られた分岐図から，重要な枝のみ取り出した図．図より，サドル・ノード分岐点の整列位置はおおよそ $k = 0.0608$ であり，自己複製パターンがシミュレーションで観察されるパラメーターと一致することが分かる．右下図は左下図の拡大図である．右下図中の (a), (b) それぞれに対応した k でのシミュレーション結果が上 2 図であって，それぞれ (a) $k = 0.06079$, (b) $k = 0.06075$ である．(a) の場合のほうが (b) の場合に比べて，よりサドル・ノード分岐点に近いため，極限点近くに滞在する時間（1 パルスの形状のままじっとしている時間）が長くなる．

き出しを行った結果の図です．図 3 に比べるとかなりすっきりしてきました．AUTO が与える解構造の情報をまずは観察しましょう．図 4 下に実線，破線を含む 2 つの図がありますが，それらが AUTO がはき出した結果を整理したものです．いくつか曲線が見えますが，それらがそれぞれ (1) の定常解に対応します．また，実線が安定な定常解で，破線が不安定な定常解を表します．図から，k を徐々に大きくしていくと $k = 0.0608$ というパラメーター値で安定な定常解と不安定な定常解がいくつか同時に現れることがわかります（このように，安定な定常解と不安定な定常解が同時に現れることをサドル・ノード分岐と呼びます）．それぞれの枝が表す定常解の形状を調べてやると，それぞれ上から半山解，1 山解，1 山半解というのがわかりました．それら 3 つの枝の下にあるのが，それぞれ 2 山解，2 山半解であることもわかります．また，数値シミュレーションの結果を照らし合わせると，$k = 0.0608$ という値が，自己複製パルスパターンが観察されるパラメーター値の上限に大変近いこともわかります．これらの比較から，安定な定常解が，あるパラメーター値でほぼ同時に消失することと，自己複製パルスパターンの間に重要な関連性があることが示唆されます．実際，パラメーター k の値を，$k = 0.0608$ という値に近づければ近づけるほど，1 山状態が長く続く自己複製パルスパターンが得られることもわかります（図 4 上，およびキャプション参照）．

上記のような結果を総合すると，サドル・ノード分岐点の整列構造という大域的な解構造が，自己複製パルスパターンを駆動していることが示唆されます．実は，サドル・ノード分岐点の整列階層構造が存在を示すだけでは不十分で，自己複製パルスパターンの説明にはなりません．紙面の関係から詳細は省きますが[6,10~12]，その後不安定多様体の繋がりなどの重要な情報を得ることによって，1 山が 2 山に分裂することが偶然ではなく大域的な解構造からくる必然であることを示すことができ，定常解の大域的な構造と自己複製パルスパターンの関係を明らかにすることができます．

上記のような視点が得られた後に，見出されたサドル・ノード分岐点の整列構造を認めた上での，理論的な発展が見られたことも注目すべきことでしょう[8,9,12]．今後，ここで見たようなコンピューターを用いた解析と，理論的な解析が合わさった解析が，複雑な現象を理解していく上で重要なスタイルになると考えています．

6. おわりに

「途中パターン」の解析に現れた「複雑な解構造」

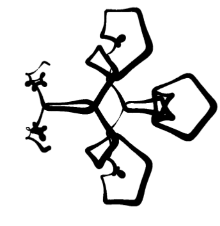
を紹介しました．ここでは「複雑」というキーワードを，解構造の複雑性に当てはめ，その中から有用な情報を引き出すこと，すなわち「視る」ことが重要となる例を紹介しました．昨今のコンピューターの急速な発展により，適切にコンピューターに対して問題を与えることさえできれば，膨大な情報が得られます．例えば，数値計算に関するわかりやすい参考書も多く出版されていますから，それらを読めば，自宅のパソコンである程度のシミュレーションならばできてしまいますし，ここで紹介した図なども，実は簡単に得ることができます．もちろん，再現は第一歩として重要ですが，それがゴールではないことは明らかです．つまり，コンピューターの中で複雑な現象が再現できることと，それが理解できるということの間には大きな隔たりがあります．コンピューターがはき出す膨大な情報を整理し，その中から現象の肝となるものを引き出す「視力」が今後ますます重要になるのではないでしょうか．世の中では，より大きなコンピューターが得られれば，複雑な現象が理解できるといった考えもあるようですが，そこに人間のイマジネーションが加わらない限り，有用な発見は得られないと思っています．私ももっと「視力」を鍛えねば！ と思う今日この頃です．

参考文献

1) J.E. Pearson, Complex patterns in a simple system, *Science* Vol.**261** (1993), 189–192.
2) K.J. Lee, W.D. McCormick, Q. Ouyang, and H.L. Swinney, Pattern formation by interacting chemical fronts, *Science* Vol.**261** (1993), 192–194.
3) K.J. Lee, W.D. McCormick, J.E. Pearson and H.L. Swinney, Experimental observation of self-replicating spots in a reaction-diffusion system, *Nature*, Vol.**369** (1994) 215–218.
4) P. Gray and S.K. Scott, Autocatalytic reactions in the isothermal, continuous stirred tank reactor: oscillations and instabilities in the system $A + 2B \to 3B$, $B \to C$, *Chem. Eng. Sci.* Vol.**39** (1984), 1087–1097.
5) E.J. Doedel, A.R. Champneys, T.F. Fairgrieve, Y.A. Kuznetsov, B. Sandstede and X. Wang, AUTO97: Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations (with HomCont), (1997). 最新の情報は，http://indy.cs.concordia.ca/auto/より得ることができる．
6) Y. Nishiura and D. Ueyama, A skeleton structure of self-replicating dynamics, *Physica D*, **130** (1999), 73–104.
7) Y. Nishiura and D. Ueyama, Spatio-temporal chaos for the Gray-Scott model, *Physica D*, **150** (2001), 137–162.
8) S. Ei, The motion of weakly interacting pulses in reaction diffusion systems, *J. Dynam. Differential Equations*, **14** (2002), 85–137.
9) S. Ei, Y. Nishiura and K. Ueda, 2^n-splitting or edge-splitting? A manner of splitting in dissipative systems, *Japan J. Indust. Appl. Math*, **18** (2001), 181–205.
10) 西浦廉政，岩波講座 現代数学の展開〈5〉『非線形問題 (1)—パターン形成の数理』，岩波書店 (1999).
11) 西浦廉政，岩波講座 物理の世界 物理と数理〈5〉『自己複製と自己崩壊のパターンダイナミクス』，岩波書店 (2003).
12) 三村昌泰監修，『パターン形成とダイナミクス』，非線形・非平衡現象の数理 4，東京大学出版会 (2006).
13) 是非動画像を観察してください．次の URL にて，動画像を見ることができます．
http://www.math.meiji.ac.jp/~daishin/mpgs/srs.mpg

（うえやま・だいしん，明治大学理工学部）

オーロラをコンピュータの中で作ろう



草野　完也・大野　暢亮・長谷川　裕記

■　1. 極域を彩るオーロラ　■

極北の凍てつく深夜に音もなく現れる光の舞，オーロラ．太古から人々はその美しさと怪しさに魅了され，様々な物語を紡ぎ出してきました．宇宙と地球の共同作業が生み出すこの偉大な芸術は，現代の科学にとっても魅力的な研究テーマです．

オーロラは電離圏と呼ばれる大気と宇宙の境界領域に現れる複雑な発光現象です．衛星や地上からの観測と共にオーロラをコンピュータで再現し，そこに潜むメカニズムを探る方法論はオーロラ研究にとって重要な役割を果たします．さらに，美しいオーロラの姿を正確な物理法則に基づいてコンピュータで再現することは，自然現象の科学的可視化の試みとしても魅力的な課題でしょう．

■　2. オーロラの起源　■

オーロラの発光メカニズムはネオン管や蛍光灯と基本的に同じです．通常，原子中の電子は最も低いエネルギー状態にありますが，何らかの刺激によって高い準位に励起されると，再びエネルギーの低い状態へ緩和する際に余分なエネルギーを光として放出するのです．そこで，発光を得るには電子を励起する必要があります．蛍光管では電極から放出された電子が原子と衝突することで，励起が生じますが，オーロラでも原理は同じです．宇宙空間から地上目掛けて降り注ぐ高速電子が，大気中の原子やイオンと衝突することでオーロラは輝くのです．では，この電子たちはどこからやってくるのでしょう？

実は，オーロラ電子の起源はまだ完全に理解されていません．しかし，太陽フレア爆発の後に激しいオーロラが表れる傾向があるため，オーロラが太陽からのプラズマ流である「太陽風」と密接に関係していることは広く信じられています．これは，太陽風のエネルギーが，地磁気が作る磁気圏を通して電離圏に流れ込むためであると考えられます．

■　3. 連結階層シミュレーション　■

オーロラをコンピュータで作るには，太陽風から磁気圏へのエネルギー入射，磁気圏から電離圏への高速電子の加速と入射，さらに大気と電子の衝突による発光という一連のプロセスを再現しなければなりません．独立行政法人海洋研究開発機構地球シミュレータセンターでは，こうした複雑現象を複数の要素モデルの連結で計算する連結階層シミュレーションの研究開発を推進しています[1,2]．

オーロラの連結階層シミュレーションは図1に示される4つの要素モデルの相互連結から成り立っています[3]．(1) 太陽風のエネルギーを駆動源とし

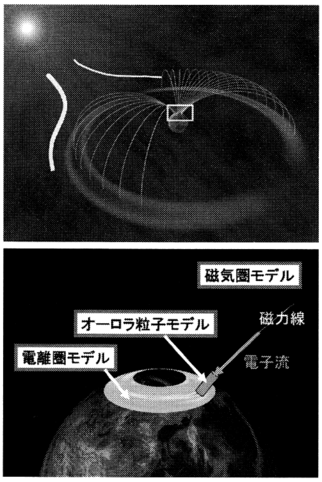


図1　オーロラの連結階層シミュレーションモデル．(上図) 太陽風の流れ (白太線) と磁気圏モデルの構造．(下図) 各要素モデルの連結．上図の極域に対応する．

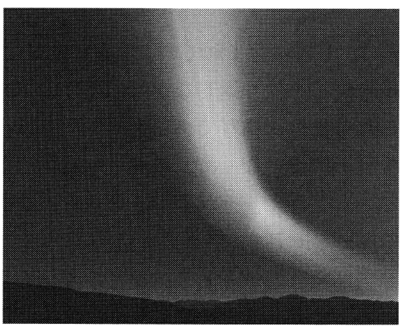


図2　コンピュータの中で作られたオーロラ．

て，極域に向かう磁力線に沿った電流変化を計算する**磁気圏電磁流体モデル**．(2) 磁気圏から電離圏へ降り注ぐ電子流れのミクロスケールダイナミクスを計算する**オーロラ粒子モデル**．(3) 電離圏の電流と電場の関係を解く**電離圏モデル**．(4) 大気中の分子と電子の衝突による励起放射を計算し，オーロラの発光を可視化する**オーロラ発光モデル**．

図2には連結階層シミュレーションの結果作られたオーロラが示されています．この図はオーロラ発光モデルに従った光の分布を高速ボリュームレンダリングソフトウェアで可視化したものです[4]．このシミュレーションでは磁気圏電離圏結合システムが自発的に生成する電離圏フィードバック不安定性によるオーロラの様子を調べています．カラー画像[5]では実際のオーロラと同様に酸素原子の放つ緑色の光と窒素原子の赤色の光がアーク状に輝いている様子が分かります．

■　4. モデルと可視化　■

複雑な現象の数理モデルを検証するには，単にモデルの計算を行うのみならず，観測可能な画像によってモデルを検証する作業が重要な場合があります．こうした方法論は大気放射や天体科学など多くの研究分野で用いられ始めています．計算のデータ量が大規模になると共に，科学研究における可視化の重要性は急速に高まることでしょう．

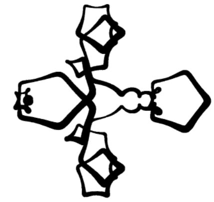
この記事の執筆と画像の作成に協力いただいた以下のみなさんに感謝いたします：川原慎太郎，荒木文明，古市幹人，杉山徹，陰山聡，渡邉國彦，佐藤哲也（敬称略）．

参考文献

1) Sato, T., "Macro-Micro Interlocked Simulator", *J. Phys.*, 2005, **16**, 310–316.
2) Kusano, K., Hirose, S., Sugiyama, T., Shima, S., Kawano, A., and Hasegawa, H., "Macro-Micro Interlocked Simulation for Multiscale Phenomena", Lecture Notes in Computer Science (Springer Berlin / Heidelberg) **4487**/2007, 914–921.
3) Sugiyama, T., Kusano, K., Hirose, S., and Kageyama, K., "MHD-PIC Connection Model in a Magnetosphere-Ionosphere Coupling System", *J. Plasma Physics*, **72**, part 6, 2006, 945–948.
4) Uehara, H., Kawahara, S., Ohno, N., Furuichi, M., Araki, F. and Kageyama, A. "MovieMaker: A Parallel Movie-Making Software for Large Scale Simulations", *J. Plasma Physics*, **72**, part 6, 2006, 841–844.
5) `https://www.es.jamstec.go.jp/esc/research/Holistic/index.html`

（くさの・かんや，
独立行政法人海洋研究開発機構，地球シミュレータセンター）
（おおの・のぶあき，
独立行政法人海洋研究開発機構，地球シミュレータセンター）
（はせがわ・ひろき，
独立行政法人海洋研究開発機構，地球シミュレータセンター）

バクテリアコロニーに現れる雁木パターン



三村　昌泰

1. 始めに

花びらのような不思議な形をしたパターンが1995年号の科学雑誌『nature』[2]の表紙を飾った．自然界に現れる美しい形や模様に興味を持っていた私はたちどころにこのパターンに引きつけられた．一体このパターンは誰が，どのようにして作ったのであろうか？ 雑誌を開いて論文を読むと，何と我々の良く知っている大腸菌が養分を摂取しながら増えていった結果作られたコロニーであることがわかり，驚いた．聞くところによると，色づけは出版社側がパターンを美しく見せるためにしたことで，色を除くと，小さなクラスターが数多く，一件不規則に分布しているように見えるが，その中に，雁が群れを作って飛んでいるときに見られるパターンが至る所現れている．大腸菌はどのようにしてこのような不思議な雁木パターンを作り上げたのだろうか？

2. インテリジェントなバクテリア

この大腸菌を調べると，実は遺伝子欠陥のためか，通常の大腸菌に較べて外部からの酸素ストレスに弱く，本来ならば死んでしまうのだが，幸運にも新しい特性を身につけた種であった．大腸菌は鞭毛を使って無目的に動くことは知られているが，この種はある特有の化学物質を感知することができ，その物質の多い方向に進み（これを走化性と言う），同時にそれと類似の物質を分泌する能力を持っているのである．こうして，彼等は他の仲間と情報交換でき，集合することから，酸素ストレスを回避することができたのである．しかしながら，この特性によって，密度の高い大きなコロニー集団が一つできてしまうと，周りにある養分を摂取するだけでは維持できないであろう．その代わりに，彼等は巧妙にも適当なサイズのコロニークラスターを多数作っていると解釈されるが，問題は，雁木パターンがどのようにしてでき上がったのかということである．本稿では，この問題に迫ってみたいと思う．

3. 巨視的モデルの紹介

大腸菌は，寒天に含まれている養分を摂取しながら，成長，細胞分裂を繰り返しながら，その数を増やしていく．これは微視的描写であるが，ここでは，細胞1個1個を見るのではなくて，数多くの細胞が空間上に分布していると考え，それを密度で見る，つまり巨視的描写で捉えるモデルを考える．モデルのポイントは，大腸菌を内部状態に依存して，活性，非活性状態の2つに分けることである．対象とする変数は次の4つである：時刻 t，2次元平面上の点 $\boldsymbol{x} = (x, y)$ における活性，非活性状態の大腸菌密度をそれぞれ $u(t, \boldsymbol{x})$, $w(t, \boldsymbol{x})$（従って，大腸菌密度は $u+w$ である），（寒天に含まれる）養分濃度を $n(t, \boldsymbol{x})$，化学物質濃度を $c(t, \boldsymbol{x})$ とする．モデルの導出については省略するが，最終的には以下のようになる：

$$
\begin{cases}
u_t = d_u \Delta u + g(u,n)u - \mathrm{div}\ (u\ \mathrm{grad}\ \chi(c)) \\
\qquad - a(u,n)u, \\
w_t = a(u,n)u, \\
n_t = d_n \Delta n - g(u,n)u, \\
c_t = d_c \Delta c + \alpha(n)u - \beta(c)c.
\end{cases}
$$

ここで d_u, d_n, d_c はそれぞれ活性大腸菌，養分，化学物質の拡散率である．$g(u,n)$ は増加率，$\chi(c)$ は走化性感度関数，$a(u,n)$ は活性大腸菌から非活性大腸菌への転換率，$\alpha(n)$, $\beta(c)$ はそれぞれ化学物質の分泌率，分解率である．この系に対して次の初期条件を与える：

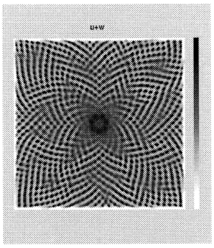


図 1　モデルに現れる雁木パターン．

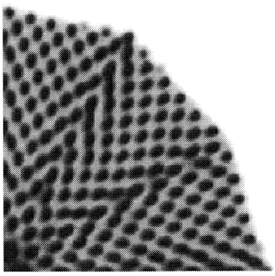


図 2　対称性を持った雁木パターン．

$$\begin{cases} u(0,\boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x}) \geq 0, \\ w(0,\boldsymbol{x}) = 0, \\ n(0,\boldsymbol{x}) = n_0 > 0, \\ c(0,\boldsymbol{x}) = 0. \end{cases}$$

ここで，$u_0(\boldsymbol{x})$ は一点接種された活性大腸菌，n_0 は空間一様に分布された養分に対応している．最初の興味は，「果たしてこのモデルから雁木パターンが発生するのか」であるが，ここでは，結果のみを紹介する．関数形，パラメターの値を適当に指定すると，一点接種から図 1 のような雁木パターンが現れることがわかった．以下では，この結果を認めた上で，雁木パターンがどのような仕組みで現れるかについて考えてみたい．至る所に現れる雁木模様が目につくのだが，それ以外にかなり整然とした市松模様が現れているのに気がつくであろう．ここで，関数 $u_0(\boldsymbol{x})$ のサポートに正 12 角形という対称性を与え，その上では定数であるような初期状態を与えると，どのようなパターンが出現するのかを考えよう．第 1 象限領域だけでシミュレーションしてみた結果（もちろんこのような対称性の高い状況下の実験はできない）は，図 2 のように，2 本の直線に対称となる市松模様（結晶構造）が現れる．それらは対称直線上ではもちろんくずれるが，それが雁木模様を表していることがわかる（結晶では，このような

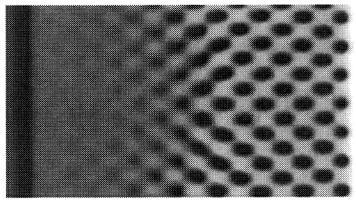


図 3　矩形領域における市松模様．

状況を粒界（grain boundary）と言う）．つまり，雁木模様は外側に向かって広がっていく市松模様に欠陥が生じる所に現れることがわかった．それを確認するために，培養領域を 2 次元矩形と考えて，$u_0(\boldsymbol{x})$ は左端において縦方向にほぼ一様な微小サポートを持ち，その上では定数となる関数と考える（残念ながら，このような実験はまだない）．上下の境界では周期境界条件を課すとき，解 $u+w$ には，図 3 のように，市松模様（結晶構造）が一様に進行するという単純なパターンが見事に現れる．当初は，雁木パターンが出る機構ばかり考えていたのだが，以上の数値シミュレーションから次のことが示唆される：大腸菌は規則正しい市松模様を作ろうとしているのだが，一点接種からの増殖拡大であることから，どうしても結晶粒界が起こり，それが空間的な揺らぎと相互作用し，雁木パターンがランダムに至る所に現れるのであろう．

現段階では，モデルからの示唆だけであって，本当かどうかを確認するためには実験家の協力が是非とも必要である．しかしながら，このような作業こそが「現象数理」の醍醐味ではなかろうかと思っている次第である．

謝辞

以上の仕事は私が広島大学にいたときに，当時大学院生である広山大資君，遠藤雄大君，青谷章弘君と共にやってきた研究である．まだこの研究は終わっていないが，彼等の貢献なくしてはここまで進めて来ることができなかった．彼等に感謝の意を表したい．

参考文献

1) E.O. Budrene and H.C. Berg: Complex patterns formed by motile cells of Escherichia coli, *nature*, **349**, 630–633 (1991).

2) E.O. Budrene and H.C. Berg: Dynamics of formation of symmetrical patterns by chemotactic bacteria, *nature*, **376**, 49–53 (1995).

（みむら・まさやす，明治大学理工学部）

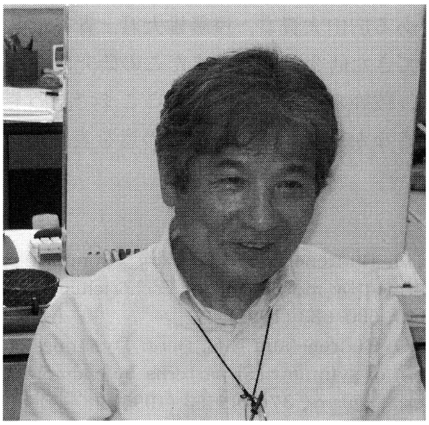
「現象数理科学」への誘い

三村　昌泰（聞き手：編集部）

1.「現象数理科学」の研究事情

――「現象数理科学」における最近の研究事情はどうなっているでしょうか.

まず,「現象数理科学」という分野は私が命名したもので，本当にそんな分野があるかどうかはわかりませんが，あえて現象という名前を数理科学の頭に付けたのは，数理科学的手法を使うのはもちろんですが，現象の解明を行うということをミッションにすることを強調したいからです．もちろん，そのために計算機アルゴリズム，解析手法の開発は当然やらなければなりません．それらは数学の分野の仕事であると言えますが，その他に現象の数学的記述であるモデリングも最初の作業として重要な仕事です．そういった意味で現象数理科学はこれまでの純粋数学とか応用数学という分け方ができません．つまり，厳密なこともやっていますし，厳密でないこともやっていますので，既存の分野，あるいは数学においては認められていないかもしれませんが，分け方が難しいところです．



三村昌泰氏.

同じ学科にいる砂田利一先生は，私のやっていることは数学であると言われるのですが，他の人に言わせると数学ではないと言います．しかしながら，このような現象数理科学的な考えで人が育っていることも事実です．その中で私の仲間である，栄伸一郎君（九州大学）や小林亮君（広島大学）がいます．やっとそういった人たちが育ってくれたということは，その人たちもこれから同様に若い人たちを育てていってくれるだろう，という期待があります．その意味で,「現象数理科学」が一つの研究分野として発展してきているのではないかと思っています．

2. 教育状況

――この分野の教育はどんな状況でしょうか.

私は3年前に明治大学に移ってきましたが，それ以来，教室の方々と一緒にいろいろな新しい試みを行ってきました．特に挙げたいものは文部科

学省「魅力ある大学院教育イニシアティブ（GP）」に採択されたことです．テーマは，「社会との関わりをもつ数理科学」とまさしく現象数理科学だったのです．まだ，始まったばかりですが，この分野に興味をもった学生を増やしていく試みが続いています．

これと関連するかどうかは別ですが，最近科学技術政策研究所から発表された報告書「忘れられた科学—数学」が数学界で話題になっています．そこで強調されている点として，数学の独自な発展と現象の解明をつなぐところの研究・教育分野が他国と比べて日本は遅れている，ということが挙げられています．私は，これは決して日本の数学レベルが落ちているわけではなく，現象数理科学的分野が弱いと思うのです．そういった視点で，これからも研究・教育をしていかなければならないと考えています．

現在，明治大学に限って言えば，「現象数理科学」分野で研究している者は私を含めて2人だけで，日本全体でも言うと少ないですよね．だから，この分野の学生たちを増やせばもっと広がっていくのではないかと思っています．

3. 海外の状況

——先ほど現象数理科学の分野は他国と比べて日本は遅れているとおっしゃっていましたが，現在の海外の状況はどうなっているでしょうか．

海外の状況は日本に比べてかなり活発であると思います．私は海外に行くことが非常に多いですが，今年の3月もイタリアで生物数学に関する春の学校に招かれて10時間の集中講義をしてきました．海外のほうが日本とは逆に，数学という学問が他の様々な分野とのつながりの中で発展しなければ生き残ることができない，ということを肌身で感じているのではないかと思います．だからこそ我が国でも「現象数理科学」をやらなければならないと感じています．

4. 特色ある講義や市民講座

——特色のある講義や市民講座はありますか．

いろいろやっていますが，明治大学数学教室公開講座では，砂田利一先生が「文化と数学」，私が「生命と数学」，京都大学の山田道夫先生が「地球と数学」という演目で講演をしました．

他にも，高校に行って「数学は役に立つ」というテーマで話をしていますし，放送大学では「自然界のパターンを数学で見る」という講義もしました．ヨーロッパでは「現象数理科学」の宣伝を兼ねた話を集中講義でしています．

5. この分野を学んでいく人たちへ

——研究室に入ってくる学生さんはどんな研究をされていますか．

私の所に来ている学生はなかなか面白くて，企業に行きたいというより学校の先生になりたいという人が多いんですよ．なぜかと聞くと，数学というのはただ単に受験で役に立つだけでなく，ここまで役に立つということを身にしみて教えたいと言うんですね．

この大学に私が来て初めてのゼミ学生のテーマは，伝染病，動物の模様，勢力圏の数理，氷が溶けていく様子，交通渋滞の数理，数理ファイナンスなど，多様です．4年生くらいの力では数学はわからないから，今はこういう数学が出てくるということだけでも知ってほしいという考えで学生に研究をしてもらいました．

——今までのお話を伺っていると，この分野では何を勉強すればよいかが非常に難しいと思うのですが…

そうなんです．とても難しいんですよ．私自身，この「現象数理科学」を学ぶためのカリキュラムのフォーマットを作らなければならないと思っているところです．何を勉強すればよいか，あえて言うならば，まずは何にでも興味を持つこと，何

にでも興味を持てる素養を身につけることだと思います．数学ですべてを語ることはできませんが，数学で語れないということもありません．これはとても矛盾した考え方のように思われますが，そういったことを学んでほしいと思っています．例えばそれは，数学史の勉強をするとよくわかります．これまでの数学はどう発展したか，特に20世紀以降は難しいけれども，それまでの18世紀から20世紀頃の数学が発展して，現在の数学に影響してきているわけです．

例えば，フーリエ級数の講義をするときは，最初の1時間は必ず歴史について話をします．フーリエ，ラグランジュ，ディリクレ，ナポレオンなどの話をして，なぜフーリエ級数が出てきたのかというところに話を持っていき，本題に入るようにします．フーリエが最初に議論したフーリエ級数は厳密ではありません．しかし，フーリエの見る目は正しかったわけです．フーリエ級数というのは第1項，第2項，…，無限大と項を増やしていくことは可能ですが，実際的に第10項までのフーリエ多項式を見ることは計算機に頼る以外ほとんど不可能だと思います．当時，フーリエは第10項までの計算，フーリエ多項式の関数形まではわかっていなかったと思うのですけれども，彼の心眼は第10項までの形を見据えていたのではないでしょうか．これは大変すごいことだと思います．本当のすごさは無限大が云々ではなく，例えば第30項目が何かを気にすることが重要なんだと思います．

こういった話をすれば，「現象数理科学」の世界も少し理解してもらえると思っています．なにも最先端のところを教えるのが「現象数理科学」ではなく，それにつながる歴史がちゃんとある，ということを伝えることが重要だと思っています．

6. 使える数学

――先生が数学を学ばれて感動したことは何でしょう．

あえて挙げるならば，中学校で習う「比」とか「相似」という概念でしょうか．私は中学生のときにそれを習って，ものすごく感激したことをよく覚えているんですよ．なぜ感激したかというと，そのときの先生が「君たち，地球の大きさは測れるか？」と聞いてきたわけです．地球の大きさはもちろん測れないのですが，その先生は太陽の光の影を調べることによって測れると言ったのです．今考えると，それは相似のことなんですが，私はそれにものすごく感動して数学をやりたくなりました．これはすごく使えると．“使える”というのがとても印象に残りましたね．

7.「現象数理科学」の重要人物

――この分野で重要と思われる人物は誰でしょう．

アラン・チューリングですね．チューリングというと「チューリングマシン」のチューリングだと思うでしょう？ もちろん，同じ人なんだけれども，この分野でのチューリングは「チューリングパターン」のチューリングなんですね．

1950年代になって分子生物学が生まれて，すべては遺伝子が解決する，という考えが当り前になりました．そのときにチューリングは，生物系の大イベントである細胞分化や形態形成が，それは非生物学的で，拡散とか化学反応で起こるということを主張したのです．ところが，そこで見せたものは単純な微分方程式で，生物学的なものではありませんでした．そのために，チューリングの主張は生物界ではずっと否定され続けていましたが，数学者がこつこつと分岐理論などを使って理論的に正しいことを示し，更にその40年後に化学者たちがチューリングのレシピーを使って，彼の主張が正しいことを発表したわけです．それは「現象数理科学」の端緒ともなっています．

実はそのチューリングの考え方というのを，私も若いときに見つけました．私はそれに興奮して1970年代にこの仕事をもってイギリスに渡り，当

時オックスフォード数学研究所にいたジム・マレー（J.D. Murray）という数理生物学の先生に話したのですが，マレーは「その話は昔からわかってるよ．でも君が自分でそれを見つけたことは偉い」と言われました．だから，そういう意味で「チューリングパターン」にはものすごく思い入れがあります．

8. 現在，興味をもっていること

――先生が今興味を持たれていることは何でしょうか．

今ちょうど気になっていることは，錯視，つまりイリュージョンとかトリックと言われる話です．ずっとパターンの研究をしてきて気付いたことは，つまりこれは“視覚化”の話だということです．視覚の世界を考えると実はいかがわしいところがあって，何がいかがわしいかと言うと，私たちの脳は不思議なもので，点がたくさん並んだときに，それらが数学的に同値なものであったとしても，近い所にある点どうしを脳は線としてつなぎたくなるんですね．つなぎたくなるがゆえにパターンが現れるわけです．数学的にはただ同値な2つのパターンであっても，私たちの脳が近い点どうしをつないでいくことによって，違うパターンに見えるわけです．その一番典型的な例が，ひまわりとかマーガレットの種の配列です．なぜ，あれがきれいに見えて面白いのか．あれは細かく見ればただのつぶつぶの集まりなわけですよ．それを人間の脳がつなぐことによって，「あ，螺旋が見える」ということになるわけです．ですので，この脳と錯視の話からすると，単純に「僕はパターンをやっています．このパターン面白いでしょ」と言っても，結構いかがわしいことをやっている可能性があるわけですよ．そこが私が悩んでいるところで，今までやってきたことはどうなのだろうか．何か新しいこと，それをノルムという言い方をすればいいのでしょうか，つまり，ノルムというのはあるものの違いを言っていることですよね．その違いを数学的な意味で言うのか，それとも脳を使って緩やかな意味で同じだと言うのか，なかなか難しくて答が出ていないのです．例えば，この絵（図1参照）を見たとき誰でもスパイラルだと思いますが，よく見るとすべての点は全部同心円上に並んでいるわけですよね．同心円なのですが，人間の脳が同心円というよりスパイラルだと判断するわけです．不思議ですよね．だけど，これは数学的に言えばスパイラルではないのです．幾何学的に言えば，「同心円上に市松模様が並んでいます」が自然な答です．数学で言えばパターンでも何でもなくて，ただの点の集合なのです．こういうことをずっとやってきたのですが答が出ずにいます．

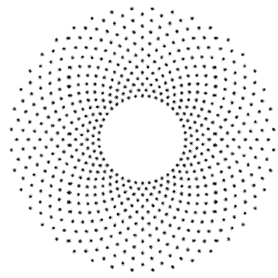


図1　同心円とスパイラルの錯視図．

――最後に，この分野に興味を持っている読者にメッセージをお願いします．

数学の可能性というものを，常に求めて，感じてほしいと思います．もっと言うなら，「数学というのはこんなところまで発展しているんだぞ」という期待と願望を持ち続けてほしいです．

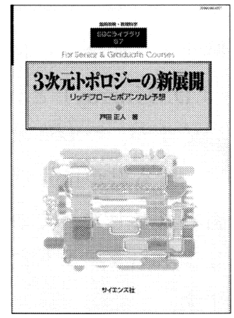
――本日は貴重なお話をお聞かせ下さり，誠にありがとうございました．

（2007年5月，明治大学生田キャンパスにて）

（みむら・まさやす，明治大学理工学部）

3次元トポロジーの新展開
リッチフローとポアンカレ予想

戸田正人著，B5 判，208 頁，本体 1867 円，サイエンス社



2003 年の春，ニューヨーク・タイムズ誌に「ロシア人数学者ペレルマンがポアンカレ予想を解決」という記事が掲載されてから，すでに 4 年半が経つ．2006 年 8 月にスペインで開催された国際数学者会議（ICM）では，国際数学連合（IMU）がその業績によりペレルマンにフィールズ賞を授賞，ところが当のペレルマンは受賞を辞退する．前後して，カオ・ズーによる幾何化予想の完全な証明を記す 300 ページを超す論文が *Asian J. Math* に掲載され，またモーガン・ティアンによるポアンカレ予想の証明の全容が記された 500 ページを超すモノグラフがアーカイブに掲載される．そして日本では，ペレルマンの議論に精通した戸田正人氏による本書が，2007 年夏に出版された．

1904 年にポアンカレが提起した「3 次元閉多様体は，単連結であれば球面とトポロジーが等しい」という命題は，後にポアンカレ予想と呼ばれ，20 世紀の数学を大きく牽引する．1980 年にサーストンがポアンカレ予想を 3 次元多様体の社会の鳥瞰図を描く幾何化予想にまで枠を広げて以来，幾何とトポロジーの相互作用が生み出す新たな展開への期待が急速に高まり，ハミルトンやアンダーソン等による有力なリーマン幾何的アプローチが始まった．

ペレルマンは，ハミルトンが提唱したリッチフローを用いた幾何化予想解決の手順（アルゴリズム）を，若干修正の上実装（インプレメント）した．『3 次元トポロジーの新展開』と題する本書は，その最も本質的な部分の詳細を解説するもので，4 つの章と付録からなっている．

ペレルマンが 2002 年秋から議論を煮詰めつつ順を追って発表した論文は 3 つあるが，幾何化予想解決に必要な基本的アイデアは，自身が 2 番目の論文の冒頭で記した通り，最初の論文の中に凝縮されている．大きな結果として 2 つ，局所非崩壊定理と標準近傍定理である．著者は誌面の大半を両定理の解説に充てた．

ペレルマンの真骨頂は，第 3 章 4 節以降に紹介される．第 2 章までは，本書の目的に合わせた 3 次元トポロジーとリーマン幾何の速成コースである．特に測地線については詳細が記されている．また，第 3 章の 3 節まででリッチフローに関する基本的事項がまとめられている．

局所非崩壊定理は，リッチフローの特異点が生じる時点へのスケーリング空間極限が安定していることを導く．その証明では，リーマン多様体の 1 パラメータ族の中を動く測地線もどきが有用な役割を果たし，伝統的道具に対する周到な準備が活きる．

第 3 章 4 節の書き出しは，著者が読者に配慮していることの典型が読み取れる．ここに登場する $\kappa-$ 非崩壊という概念は全くのペレルマンの独創によるもので，議論に実に有効に働く．しかしながらその真価を理解・実感するには専門家と言えども時間がかかる．そうした事情に配慮し，急がず適切な注釈を加え，他の結果との関係もいちいち言及しながら，本節の目標の定理 3.4.1 の解説を徐々に加え，2 ページを割いた上で，さらに動機を説明する前計算を紹介している．

第 4 章 2 節の最初の 3 つの小節は，標準近傍定理の証明に充てられている．この定理は，時々刻々と変化する空間のスカラー曲率が大きくなる点の近傍のスケーリング極限が，素性のよく分かる κ 解に時空で収束することを主張し，特異点が生じた時点の状況を明確にする．そして最後の小節は，最初の特異時点で起きること，およびすべき改変手術についての約 4 ページの解説の後，あと必要な議論はペレルマンの 2 番目の技術的な論文の最も難しい部分である，とするパラグラフで締めくくられる．

このカットはたいへん思い切りが良い．最初は「おや？」と思ったが，何度か読み返すうちに，なるほどこれが著者のねらいと得心した．限られた誌面ゆえ，ペレルマンの最も重要な貢献を精選したということである．極めて先端的内容を扱う書でありながら，ロングセラーへの期待が膨らむ．

小島　定吉（東京工業大学大学院情報理工学研究科）

P2Pネットワークと複雑ネットワーク

小島 一浩

1. はじめに

ネットワーク科学は，1998年のWattsら[1)]，1999年のBarabasiら[2)]の論文を契機に一気に開花した．そして本連載でも紹介されているように，その研究対象は遺伝子などの生物系から，WWWを代表とする工学系，企業間取引のような経済系，そして既に研究が取り組まれていた社会学系とその領域を広げ，スケールもミクロからマクロまで広がっている．

時期を同じくしてインターネット分野で，あるシステムが注目され始めた．それが本稿で紹介するPeer-to-Peer（P2P）システムである．我々が日常使っている電子メールやWWWなどのサービスは，サーバによって提供され，我々のPCはコンテンツやサービスを要求するだけのクライアントである（図1(a)）．このようなシステムをクライアント・サーバシステムと呼ぶ．これに対しP2Pシステムでは，図1(b)のように多数のピア(Peer)[*1)]と呼ばれる計算機によってサービスを提供する基盤が構成され，各ピアは，ときにはコンテンツやサービスを要求するクライアントとして，

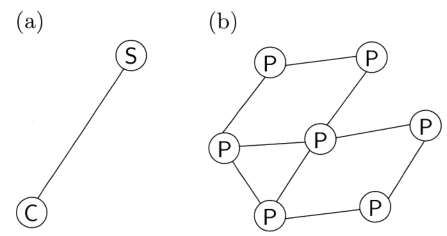


図1 クライアント・サーバシステムとP2Pシステムの比較．C：クライアント，S：サーバ，P：ピア．

またあるときはサービスを提供するサーバとして振る舞う．P2Pシステムでは，ピアのシステムへの参加・離脱が許されるため，要求したコンテンツやサービスが，現在どのピアによって提供可能であるか探し出さなければならない．従って，検索機能はP2Pシステムを構成する上で必須の機能である．ピアによって構成されるシステム基盤がネットワーク構造であるとき，その検索性能がネットワークの構造とルーティングアルゴリズムによることは容易に想像できるであろう．近年，P2Pシステムの設計に際して，従来の通信・インターネット分野における設計とは異なった，ネットワーク科学からのアプローチが試み出され始めている．

本稿では，ネットワーク科学からのアプローチとして，P2Pシステムの一つであるGnutellaのネットワーク構造，またネットワーク構造とルー

*1) クライアント（client）とサーバ（server）の造語として，サーバント（servent，また"servant"にかけている）と呼ばれることもある．

ティングアルゴリズムの関係性を扱ったナビゲーション問題について紹介する．

2. P2P システム

P2P システムへのネットワーク科学からのアプローチを紹介する前に，もう少し P2P システムに関して詳しく述べておく．P2P システムは，検索機能の実現方法，ネットワーク構造の設計，ルーティング方法によって，表 1 のように分類することができる．表 1 では，分類に対応するプロトコル名，またはシステムの総称を記してある．

表 1　P2P システムの分類．

ハイブリッド型	ピュア型		
Napster BitTorrent[3]		非構造型	構造型
	Flooding	Gnutella	
	KBR	Freenet[4]	DHT SkipNet[5]

まず検索機能に着目すると，検索を中央のサーバで行うハイブリッド型と，システム基盤であるネットワークに参加しているピアによって行うピュア型に分類される．ハイブリッド型では，ピアはシステムへの参加時，または人手により，共有ファイルのコンテンツ名や保存先の情報を中央サーバに登録する．希望のコンテンツを中央サーバで検索し (図 2 (a) の Q)，検索結果を受け取った後 (図 2 (a) の R)，コンテンツを所有しているピアと接続しダウンロードを実行する (図 2 (a) の D)．ハイブリッド型の代表として，Napster*2) や BitTorrent*3) がある．これに対してピュア型では，図 2 (b) のように，システム基盤であるネットワーク上で検索要求をバケツリレー的にピア間転送し，検索要求

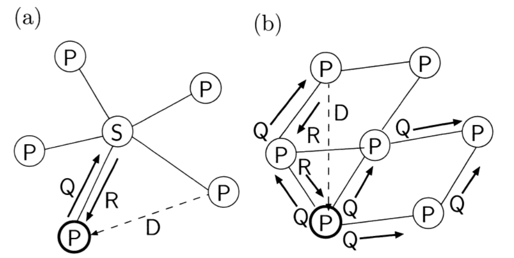


図 2　P2P システムのシステム構成．Q：検索要求，R：検索結果，D：ダウンロードのメッセージのやり取りを表す．

を受け取ったピアが，その検索条件を満たした場合に，検索結果を返信することによって検索機能を実現する．

さらにピュア型は，システム基盤となるネットワークの構造を事前に設計する構造型と，明確な設計は行わない非構造型に分類される．構造型の場合，ネットワーク構造をリング状の 1 次元格子空間や d 次元格子空間とし，各ピアを格子点上に配置する．それに対し非構造型では，ネットワークはピアの自己組織化によって形成される．

またピュア型は，ルーティング方法によっても分類される．Flooding 法では，検索要求を送信元ピアを除いたすべての隣接ピアに転送する．これに対し，KBR (Key–Based Routing) 法では，各ピアは検索キーとルーティングテーブルを照し合わせ，メッセージの転送先を決定する．KBR 法に関しては，6 節で詳しく説明を行う．

本稿では，検索のためのシステム基盤がネットワーク構造となるピュア型 P2P システムを取り扱い，非構造型に関しては Gnutella ネットワークの構造，構造型に関しては，DHT (Distributed Hash Table) のネットワーク構造とルーティングアルゴリズムの設計に対するネットワーク科学からのアプローチを紹介する．

3. Gnutella

Gnutella は，2000 年 3 月，Nullsoft 社*4) のプロ

*2)　1998 年に S. Fanning (Northeastern Univ.) によって開発された音楽ファイル共有システム．1999 年に Napster 社を設立．2000 年，全米レコード協会に提訴され，2002 年に会社清算手続きが決定．しかし，Napster のブランド名の認知度は高かったため売却される．現在，日本では定額制音楽ダウンロード・音楽配信サービスを行っている．

*3)　2001 年に B. Cohen によって開発されたプロトコル．トラッカー (Tracker) と呼ばれる web インターフェースを備えたサーバ上で，コンテンツ所有情報の登録・検索を行う．

*4)　Windows 用メディア・プレイバック・プラットフォームである Winamp を開発している会社として有名．

表 2　Gnutella プロトコルのメッセージ種別．

メッセージ種別	機能
PING	PING 問い合わせ
PONG	PING への応答
QUERY	検索問い合わせ
QUERYHIT	検索問い合わせへの応答

グラム技術者である J. Frankel と T. Pepper によって開発・公開されたプロトコルである．その仕様はウェブサイト[6,7]にて公開されている．Gnutella プロトコルに対応したソフトウェアを Gnutella クローンと呼び，多くのクローンソフトウェアが無償・有償で提供されている．特に Limewire[8] は，Java によるオープンソースで開発者向けの情報が充実している．Gnutella クローンは，一般的に個人の PC にインストールされ，音楽ファイル共有ソフトとして現在でも世界的に人気がある．P2P システムの基盤は，個人 PC をピア，Gnutella プロトコルに従う TCP セッションをリンクとする，Gnutella ネットワークである．

Gnutella には，メジャーバージョンとしてバージョン 0.4 と 0.6 がある*5)．Gnutella プロトコルの大まかなメッセージ種別を表 2 に示す．PING および QUERY には，TTL（Time To Live）と呼ばれる整数値がメッセージデータ部分に含まれ，ピアがメッセージ転送をするたびに 1 だけ減算され，TTL が 0 になるとメッセージ転送は終了となる．

Gnutella では，ピアの参加・離脱は自由であるため，隣接ピアの離脱により，リンクが消滅することが頻繁に発生する．このような場合においても，システム基盤であるネットワークの連結性を維持する必要がある．そのため各ピアは，PING を隣接ピアに送信し，PONG を受信することにより，TTL 設定範囲内のピアの IP アドレスとポート番号を収集し，隣接ピアとの TCP セッションが切断された場合に，すぐに新たなピアとの接続を可能にしている．

*5)　Gnutella プロトコルの設計方針の違いから，開発コミュニティが分裂し，Gnutella2 と呼ばれるブランチが存在する．Gnutella と Gnutella2 では互換性はない．

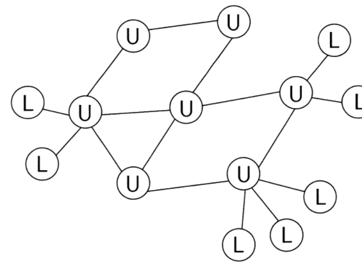


図 3　Ultra ピアと Leaf ピアによる階層構造．U は Ultra ピア，L は Leaf ピアを表す．

Gnutella では，ネットワークの連結性維持のための情報収集である PING と，検索要求である QUERY が隣接ピアに転送されるため，すべてのピアが同様に振る舞った場合，ネットワーク上にメッセージが溢れることは容易に想像できる．そこで，バージョン 0.6 では，ネットワークの構造およびルーティングアルゴリズムに改良が施されている．詳しくは，仕様書サイト[6〜8]を参照していただくとして，ここではネットワーク構造の改良である Ultra ピアと Leaf ピアについて説明する．

バージョン 0.4 では，図 2 (b) に示したように，各ピアは同等に扱われ，プロトコル自体は自己組織化されるネットワーク構造を意識しておらず，フラットな構造になることを期待している．これに対しバージョン 0.6 では，図 3 のように，回線帯域幅やネットワークへの参加時間により，安定なピアを Ultra ピアとして，ネットワークのコアとなる部分を形成させ，その他のピアを Leaf ピアとして，コア部分にぶら下がるようにネットワークを明示的に階層化させる．ただし，各ピアが Ultra ピアになり得るかどうかの判断基準は，Gnutella クローンの実装によって異なる．

4. Gnutella ネットワークの構造

Gnutella ネットワークを，ネットワーク科学の対象として分析するためには，ピアと TCP セッションの情報を収集し，ネットワークとして再構成する必要がある．Gnutella ネットワークのこれらの情報は，データベースとして公開されている

ものがないので，WWWのネットワーク構造分析の場合と同様に，クローラを作成し自身で収集するしかない*6)．ただし，既に述べたようにノードとリンクは，分〜時単位でダイナミックに変化するため，WWW以上に速度を重視したクローラを作成する必要がある．

Gnutellaネットワークのネットワーク構造の研究としては，Jovanovicら[9]，Ripeanuら[10]の先行研究がある．それぞれ，既に説明したPING–PONGを利用したクローラを作成し，Gnutellaネットワークを再構成している．Ripeanuらの報告によると，次数分布は2000年11月では，べき分布となるが，2001年3月，5月では，次数$k=10$付近にピークが表れ，ピークの前後で，べき分布を示す．このピークの出現は，少数のユーザがGnutellaネットワークの連結性を高めるために，同時に接続許可するTCPセッション制限を緩め，サーバのような役割を行っている結果ではないか，とRipeanuらは推察している．しかし，そもそもGnutellaプロトコル自体には，ネットワーク構造をスケールフリーネットワークに自己組織化させる，明示的なアルゴリズムがないにも係わらず，何故，スケールフリーネットワークが自己組織化されるのかということには答えていない．

Ripeanuらの研究以降，Gnutellaプロトコルはバージョン0.4から0.6へ上がり，Gnutellaネットワークのネットワーク構造に関する研究報告は，あまりなされていない．そこで，筆者はGnutellaクローラを作成し，最近のネットワーク構造の分析を行った．バージョン0.6ではクローリング用のメッセージが導入され，簡単にUltraピアとLeafピアの情報を収集することが可能となった．そこで，このクローラ用のメッセージを用いてクローラを作成した．

表3に，クローリング時間やアクセスしたUltraピア数を示す．表3で，アクセスUltraピアは，クローリング要求を送信したUltraピア数，アクティブUltraピア数は，クローリング要求に対し5秒以内に返信したUltraピア数，UltraピアおよびLeafピアは，クローリング応答から得られたものも含めたピア数である．今回のクローリングでは，クローリング要求に対し30%程度のUltraピアが返信をしている．

クローリング結果をもとにネットワークを再構成し，そのネットワークの次数分布とクラスタ係数の次数依存性を図4，再構成されたネットワークの可視化結果を図5に示す．バージョン0.6では，Ultraピアによって構成されるネットワーク

表3 クローリングしたGnutellaネットワークの基礎情報．括弧はエッジ数．

観測時間	1時間
アクセスUltraピア	128,596
アクティブUltraピア	38,364 (80,053)
Ultraピア	325,168 (461,576)
Leafピア	381,680 (429,221)

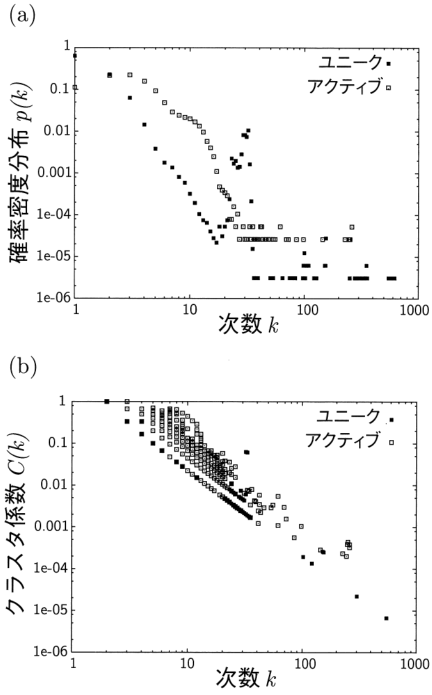


図4 Gnutellaネットワークのネットワーク分析結果．(a) 次数分布，(b) クラスタ係数の次数依存性．

*6) Gnutella2に関しては，クローリング結果を報告しているサイト（http://crawler.trillinux.org/）がある．ただし，ネットワーク構造に関するデータの公開は行っていないようである．

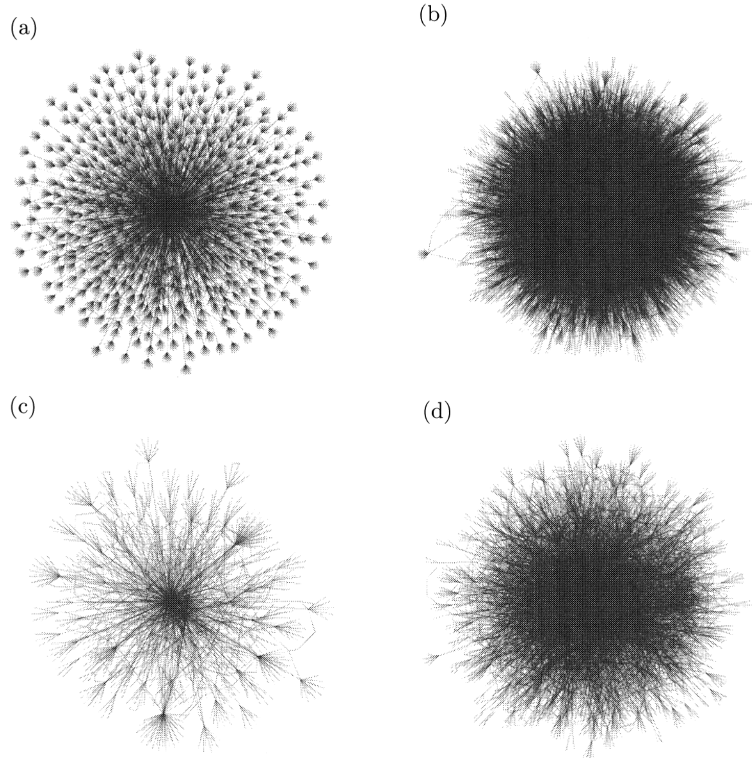


図 5 ネットワークの可視化．(a), (b) はユニーク Ultra ピア，(c), (d) はアクティブ Ultra ピアのみによって構成．(a), (c) は次数中心から 2 ホップまで，(b), (d) は次数中心から 3 ホップまでを，Cytoscape[12] を用いて描画．

が，検索機能におけるシステム基盤として重要であるので，Ultra ピアのみでネットワークの再構成を行った．図 4 において，ユニークはユニークな Ultra ピアで構成されるネットワーク，アクティブはアクティブな Ultra ピアのみで構成されるネットワークである．また，図 5 では，次数が最も高くなるノードを中心として，2, 3 ホップ先までの範囲でそれぞれ描画している．

次数分布では，ユニーク Ultra ピアによって再構成した場合，Ripeanu らの結果と同じように，次数 $k = 10$ 付近でピークが観測された．しかし，ピーク前では，べき分布，ピーク後ではほぼ一定分布のようである．また，アクティブ Ultra ピアのみで再構成した場合，明らかなピークは観測し難い．一方，クラスタ係数の次数依存性では，クラスタ係数は $C(k) = \alpha k^{-\beta}$ となり，Barabasi らが提案した，モジュールのコピーによる階層構造[11] が示唆される．

次数分布におけるピークの表れは，単純にサンプリング数の問題なのか，それとも観測時間幅や walking などクローリング方法の問題なのか，また，階層構造がネットワークの可視化にどのように表れているのかなど，今後さらに詳しい分析が必要である．

5. スモールワールド現象とナビゲーション問題

さて，ここで一度，P2P システムの話を離れて，スモールワールド現象とナビゲーション問題へ話題を移す．スモールワールド現象は，現在のネットワーク科学の普及の一端を担った社会学における話題であるが，ナビゲーション問題を通して，P2P システム，特に構造型 P2P システムと関係が深い．

スモールワールド現象とは，全く初めて会った人と話しているうちに共通の知人がいることが分かり，思わず「世間は狭いですね（It's a small world!）」と言ってしまうという，誰しも一度は経験したことがあろう不思議な現象のことである．

1960 年代，実験社会心理学者である S. Milgram[13, 14]は，スモールワールド現象を以下のように捉えた．

- **現象 1**
  X と Z は互いに知り合いではない．しかし，共通の知人 Y を持つ．
- **現象 2**
  X と Z は互いに知り合いではない．しかし，a,b,···,y を介して X と Z は連結している．

ここで，現象 2 は現象 1 の拡張である．Milgram は，ネブラスカ州オマハの住人をランダムに選び，目標人物であるボストンの株主仲買人を知っていたら手紙を直接渡してもらう，知らなかったら目標人物を知っていそうな知人に手紙を転送してもらうことにより，現象 2 の仲介ステップ数を求める実験を行った*7)．Milgram はこの実験によって，米国の任意の 2 人は，わずか仲介 5 人程度でつながっているという結果を得た*8)．これは，6 次の隔たり（Six Degrees of Separation）と呼ばれる*9)．

スモールワールド現象を生み出す知人関係のネットワーク構造は，長い間ランダムネットワークによってモデル化されてきた．しかし，ランダムネットワークでは，自身の知人どうしが知人関係にある確率が高いことをモデル化できない．これに対し，Watts らがクラスタ係数を導入し，さらにスモールワールドネットワークとその構成アルゴリズムを提案したのである[1]．

*7) J.S. Kleinfeld[15]は，サンプリングバイアスなど実験条件が不適切であったと指摘している．

*8) この実験によって明らかになったのは，現象 2 のみであり，疑問の発端であった現象 1 には何ら答えていない．

*9) Milgram 自身は論文の中で，Six Degrees of Separation という記述はしていない．Six Degrees of Separation は，劇作家 J. Guare が 1991 年に発表した演劇のタイトルが由来．

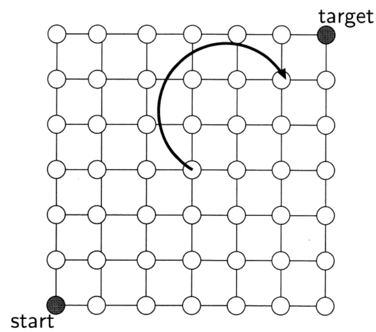


図 6　Kleinberg のナビゲーション問題．太線の矢印が長距離リンクを表す．

Watts らの提案により，スモールワールド現象は解決したかのように思われたが，J. Kleinberg[16]は，Milgram の手紙転送実験に対して，以下の疑問を提示した．

- **疑問 1**
  ショートカットパスは何故存在するのか？
- **疑問 2**
  人は如何にして局所情報のみから，ターゲットへの最短経路を発見しているのか？

疑問 1 は，ネットワーク構造に関する疑問であり，疑問 2 は，ルーティングアルゴリズムに関する疑問である．各ノードが，ネットワーク構造全体を内部モデルとして持つ場合，幅優先探索によって最短経路を発見することができる．しかし，各ノードは，自身がつながっているノード，つまり隣接ノードの位置情報しか知らない状況で，如何にして最短経路が結果的に選択されるのであろうか？これに対し Kleinberg は，メッセージのターゲットへの転送問題を，2 次元格子空間でモデル化し解析を行った．Kleinberg は，図 6 に示すように，各ノードが格子空間上の隣接ノードとのリンク以外に，ノード間の距離 r に従い，確率 $p(r) = \alpha r^{-\gamma}$ で長距離リンクを持つ 2 次元格子空間を考えた．この 2 次元格子空間上で，メッセージ転送に対し以下を仮定した．

- **仮定 1：局所情報**
  各ノードは，接続しているノードの位置情報を持つ．

- **仮定 2：ターゲット情報**
  ターゲットの位置情報を持つ.
- **仮定 3：ルーティングアルゴリズム**
  メッセージ転送は，ターゲット間距離が最小となる隣接ノードに転送する.

ここで，現在メッセージを保有しているノードを u, u の隣接ノード（格子空間の隣のノードと長距離リンクによるノード）集合を S_u，ターゲットノードを t，メッセージ転送先ノードを v とすると，仮定 3 は

$$v = \arg\min_{v' \in S_u} r(v', t) \tag{1}$$

によるルーティングアルゴリズムに対応する．このとき，$\gamma = 2$ でターゲットへの到達ステップの期待値が最小となり，ネットワークのノード数を n とすると，そのオーダーは $O(\log^2 n)$ となることを示した.

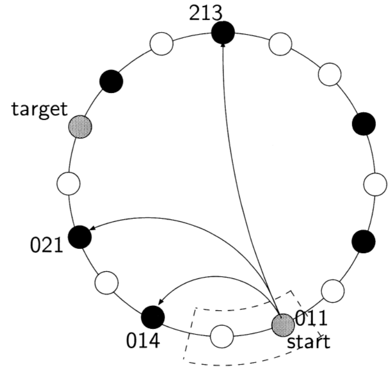


図 7　DHT における格子空間の例．黒丸はピアによって占有されている格子点，白丸は空き格子点.

表 4　DHT におけるルーティングテーブルの例.

id=011		
	id	IP アドレス:ポート番号
01*	014	x.x.x.x:x
0**	021	y.y.y.y:y
***	213	z.z.z.z:z

6. 構造型 P2P システム

さて再び P2P システムへ話を戻す．非構造型 P2P システムにおける問題点の一つは，検索要求のメッセージが TTL によって到達可能な範囲のみの検索であり，確実に検索要求を満たすピアに到達できる保証がないことである．これに対し，一つの解決策として構造型 P2P システムが提案された.

構造型 P2P システムの例として，DHT に関して説明をする．DHT ではシステム基盤として，リング[17,18]，ハイパートーラス[19]，木構造[20,21]上の格子空間を用いる．図 7 では，リング格子空間を例に示す．格子空間上の格子点とピアには固有識別子 $id \in K$ が割り当てられる．コンテンツはコンテンツ名やバイナリデータから hash 関数により，検索キー $key \in K$ が割り当てられる．ピアが P2P システムに参加すると，ピアは id が一致する格子点を占有する．格子空間で自身と次に占有されている格子点までの空き格子点の集合を S_{id}（図 7 の破線領域）とすると，各ピアは $key \in S_{id}$ を満たすコンテンツの情報（どのピアがその情報を提供できるのかなど）を管理する．また，各ピアは id の一致度に従って表 4 に示すようなルーティングテーブル T_{id} を，他のピアとメッセージをやり取りすることにより作成する．検索キーを key_q とすると，各ピアは

$$id = \arg\min_{id' \in T_{id}} d(id', key_q) \tag{2}$$

に従って，メッセージ転送先を決定する．ここで，$d(\cdot)$ は格子空間上で定義される距離である．このメッセージ転送を繰り返すことにより，現在 key_q を管理しているピアに到達することができる．式 (2) のように，検索キーと固有識別子の比較によるルーティングを KBR 法と言う．このとき，ターゲットとなるピアへの到達ステップの期待値を計算することができ，ルーティングテーブルのサイズを $\log n$ としたとき，そのステップ数は $O(\log n)$ となる．しかし，DHT では，到達ステップ数の保証と引き換えに，ピアの参加・離脱に伴い，$\log n$ サイズのルーティングテーブルを常に更新しなければならず，その通信コストはかなり負担となる.

このように，検索したいコンテンツを key_q を通じてピア id が定義される格子空間に一対一で写像することにより，検索問題を $id = key_q$ を満たすピアへの到達問題として定式化することができる．さて，既に気が付いた読者もいると思うが，DHT の検索問題は先のナビゲーション問題と等価である．DHT では，ルーティングテーブルの更新コストが負担になるが，Kleinberg の格子空間では，長距離リンクを距離に応じて確率的に $k = O(1)$ 本生成することにより，到達ステップ数が $O\left(\frac{\log^2 n}{k}\right)$ になることを保証している．従って，到達ステップ数を犠牲にして，ルーティングテーブルの更新コストを下げることが可能となる．このように，リング上で，距離に応じて確率的に長距離リンクを生成する DHT として，Symphony[22] が提案され，システム実装がなされている[23]．

7. おわりに

以上，本稿では P2P システムの研究分野におけるネットワーク科学からのアプローチを紹介してきた．P2P システムにおける検索という必須機能が，ナビゲーション問題として関係していることが垣間見られたことと思う．しかし，非構造型 P2P システムにおける検索を，構造型 P2P システムの場合と同様に，ナビゲーション問題として定式化できるのか，ネットワーク構造とルーティングアルゴリズムの設計問題として，どのように扱っていけるのかなど考えるべき問題は多い．今後，さらに通信分野とネットワーク科学の研究が進むことを期待したい．

参考文献

1) D.J. Watts and S.H. Strogatz: Collective dynamics of ‘small-world’ networks, *Nature*, **393** (1998), 440–442.
2) A.L. Barabasi and R. Albert: Emergence of Scaling in Random Networks, *Science*, **286** (1999), 509–512.
3) http://www.bittorrent.org/
4) http://freenetproject.org/
5) N.J.A. Harvey, J. Dunagan, M.B. Jones, S. Saroiu, M. Theimer and A. Wolman: SkipNet: A Scalable Overlay Network with Practical Locality Properties, *Microsoft Research Technical Report* MSR-TR-2002-**92** (2002).
6) http://rfc-gnutella.sourceforge.net/
7) http://gnutella-specs.rakjar.de/
8) http://www.limewire.org/
9) M.J. Jovanovic, F.S. Annexstein and K.A. Berman: Scalability Issues in Large Peer-to-Peer Networks - A Case Study of Gnutella, *Technical report*, Univ. of Cincinnati (2001).
10) M. Ripeanu, A. Iamnitchi and I. Foster: Mapping the Gnutella Network, *IEEE Internet Computing*, January/February (2002), 50–57.
11) E. Ravasz and A.L. Barabasi: Hierarchical organization in complex networks, *Physical Review E* **67**, 026112 (2003).
12) http://www.cytoscape.org/
13) S. Milgram: The Small-World Problem, *Psychology Today*, **1** (1967), 61–67.
14) J. Travers and S. Milgram: An Experimental Study of The Small World Problem, *Sociometry*, **32** (1969), 425–443.
15) J.S. Kleinfeld: The Small World Problem, *Society*, **39** (2002), 61–66.
16) J. Kleinberg: The small-world phenomenon: An algorithmic perspective, *Proc. 32nd ACM Symposium on Theory of Computing* (2000).
17) I. Stoica, R. Morris, D. Karger, M.F. Kaashoek and H. Bgalakrishnan: Chord: A Scalable Peer-to-peer Lookup Service for Internet Applications, *Proc. of the ACM SIGCOMM Conf.*, 2001.
18) A. Rowstron and P. Druschel: Pastry: Scalable, decentralized object location and routing for large-scale peer-to-peer system, *Proc. of the 18th IFIP/ACM Int. Conf. on Distributed Systems Platforms,* 2001.
19) S. Ratnasamy, P. Francis, M. Handley and R. Karp: A Scalable Content-Addressable Network, *Proc. of the ACM SIGCOMM Conf.*, 2001.
20) K. Aberer: P-Grid: A Self-Organizing Access Structure for P2P Information Systems, *Proc. of the 6th Int. Conf. on Cooperative Information Systems*, 2001.
21) P. Maymounkov and D. Maziéres: Kademlia: A Peer-to-peer Information System Based on the XOR Metric, *Proc. of the 1st Int. Workshop on Peer-to-Peer System*, 2002.
22) G.S. Manku, M. Bawa and P. Raghavan: Symphony: Distributed Hashing In A Small World, *Proc. 4th USENIX Symposium on Internet Technologies and Systems, USITS* 2003.
23) http://p2pati.sourceforge.net/

（こじま・かずひろ，独立行政法人産業技術総合研究所）

最終回 a primer of Probability

使うための確率論入門

確率論とは何か

渡 辺　浩

連載3回目に「確率とは何か」ということについて考えましたが，今回のテーマは「確率論とは何か」です．これらの問いは共通の根をもっていますが，それぞれ異なる方向に思考を導きます．今回は，確率論を公理論的に定式化する方法を一瞥し，公理から導かれる結論の一つである「ボレル–カンテリの定理」を取り上げます．

Theme 天使の計算

天使 A　最近の調査では，地球上で奇跡の起きる確率が年々減少しているようです．

天使 B　私の計算では，西暦 y 年に奇跡が起きる確率は $\frac{1}{y^2}$ ほどです．

天使 C　そうすると，奇跡の時代はいつか終わるのですね．

Theme 確率論とは

Probability theory is a measure theory — with a soul.

Mark Kac

14.1 コルモゴロフの公理系

一般に，確率モデルにおいて事象の確率が定められている状況を，次のように公理論的に整理することができる．まず，Ω を全体集合とし，Ω の部分集合の集まり $\mathcal{F}$ が次の性質をもつとする．

$$\Omega, \varnothing \in \mathcal{F}, \tag{14.1}$$

$$A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F}, \tag{14.2}$$

$$A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{F}, \quad \bigcap_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{F}. \tag{14.3}$$

ただし，$\varnothing$ は空集合，A^c は A の補集合，n は任意の自然数である．このとき，$\mathcal{F}$ を**有限加法族**と言い，$\mathcal{F}$ に属する集合を**事象**と呼ぶ[傍注1]．そして，各事象に確率が付与されているとする．すなわち，有限加法族 $\mathcal{F}$ 上で定義された関数 P が次の性質をもつとする．

[傍注1] 例えば，集合 $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \varnothing\}$，および，$\Omega$ のすべての部分集合からなる集合 $\mathcal{F}_1$ はどちらも有限加法族である．

$$P(\Omega) = 1, \quad P(\varnothing) = 0, \tag{14.4}$$

$$P(A) \geq 0, \quad A \in \mathcal{F}, \tag{14.5}$$

$$A_j \in \mathcal{F}, \quad A = \bigcup_{j=1}^{n} A_j \quad (\text{直和}) \implies P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j). \tag{14.6}$$

(14.6) の性質を**有限加法性**と言い，(14.4), (14.5), (14.6) を満たす P を**有限加法的確率測度**と言う．

この連載において，ランダムウォークなどのマルコフ連鎖の議論は，上記のような有限加法的確率測度の枠組みの中で展開されている．しかし，前回最後に指摘したように，この枠組みは数学的に自由のきかない所があり，(14.3), (14.6) を拡張した性質

$$A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{F}, \quad \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{F}, \tag{14.7}$$

$$A_j \in \mathcal{F}, \quad A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \quad (\text{直和}) \implies P(A) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j) \tag{14.8}$$

が成立することが望ましいのである．(14.1), (14.2), (14.7) を満たす $\mathcal{F}$ を **σ 加法族**[傍注2]，(14.4), (14.5), (14.8) を満たす P を **σ 加法的確率測度**，(14.8) の性質を **σ 加法性**と言う．今日，確率論は，σ 加法性を基軸とするこれら一連の公理を満たす理論として，すなわち，σ 加法族の上で定義された σ 加法的確率測度として定式化されるのが普通である．この公理系を**コルモゴロフの公理系**と言う[1)]．

[傍注2] 例えば，傍注 1 の集合 $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1$ はどちらも σ 加法族である．しかし，応用上 $\mathcal{F}_0$ は小さすぎ，$\mathcal{F}_1$ は大きすぎる．

ところで，確率測度の定義において，条件 $P(\Omega) = 1$ を要請しないとき，P を**測度**と言う．測度は，直線上の区間の長さ，平面図形の面積，立体の体積などの計量概念を抽象したものであるが，特に，$P(\Omega) = 1$ を満たす測度を「確率測度」と呼ぶのである．冒頭に引用したマーク・カッツの警句は，この事情を批評するものである[傍注3]．

[傍注3] 確率論の body は測度論で作られているが，確率論を確率論たらしめているのは soul であると言っているように思われる．

14.2 確率測度の構成

具体的に σ 加法的確率測度を構成する立場から言えば，有限加法性 (14.6) と σ 加法性 (14.8) のギャップを埋める必要がある．いくつか例を挙げよう．

例 14.1　N を高々可算集合とし，N のすべての部分集合からなる σ 加法族を $\mathcal{F}$ とする．条件

$$p_n \geq 0 \ (n \in N), \quad \sum_{n \in N} p_n = 1$$

を満たす数列 $\{p_n\}$ に対し，

$$P(A) = \sum_{n \in A} p_n, \quad A \in \mathcal{F}$$

で定義される関数 P は σ 加法性をもつ．このようにして定まる確率分布を**離散分布**と言う．◇

例 14.2　区間 $I = [0, 1]$ 上の**一様分布**を考える．すなわち，I の部分集合からなる σ 加法族 $\mathcal{F}$ を適当に定め，$\mathcal{F}$ 上の σ 加法的確率測度 P で，

$$P([a, b]) = b - a, \quad [a, b] \subset I$$

を満たすものを定めたい．そこでまず，有限加法的確率測度を定義する．I に含まれる有限個の（閉，開，半開）区間の和集合を有限区間塊ということにする．有限区間塊全体 $\mathcal{F}'$ は有限加法族になる．そこで，

$$P'(A) = \text{‘}A \text{ に含まれる区間の長さの和'}, \quad A \in \mathcal{F}'$$

とおくと，P' は $\mathcal{F}'$ 上で定義された有限加法的確率測度となる．

次に，この P' を拡張して，σ 加法的確率測度を作る．そのために，$\mathcal{F}'$ を部分集合として含むような σ 加法族のうち，最小のものを $\mathcal{F}$ とする[傍注4]．言い換えれば，$\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}''$ なる σ 加法族 $\mathcal{F}''$ をすべて考え，それらの共通部分を $\mathcal{F}$ とするのである[傍注5]．$\mathcal{F}$ を $\mathcal{F}'$ が**生成する σ 加法族**と言う．そこで，P' の定義域を $\mathcal{F}$ に拡げて，σ 加法的確率測度 P を作ることを考える．

次の定理は，一般に，有限加法的確率測度を σ 加法的確率測度に拡張し得る条件を与えるものである．

定理 14.1　有限加法族 $\mathcal{F}'$ の上で定義された有限加法的確率測度 P' があり，P' は $\mathcal{F}'$ 上で σ 加法的であるとする．すなわち，$A \in \mathcal{F}'$ が可算無限個の集合 $A_j \in \mathcal{F}', j = 1, 2, \cdots$ の直和として $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ と表されるとき，

$$P(A) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j)$$

が成り立つと仮定する．このとき，P' は，$\mathcal{F}'$ が生成する σ 加法族 $\mathcal{F}$ 上の σ 加法的確率測度 P に一意的に拡張される．◇

証明については，例えば文献 1～3) を参照されたい．I 上の一様分布の場合にこの定理を適用すると，目的の σ 加法的確率測度が得られるのだが，定理の仮定を検証することについては，例えば文献 2) を参照されたい．

[傍注4]　I のすべての部分集合に確率を付与して，矛盾なく σ 加法性が成立するようにすることはできないことが知られている．

[傍注5]　直観的に言えば，$\mathcal{F}'$ に属する集合に対し，補集合を取る操作，可算無限個の集合の和集合（と共通部分）を取る操作を繰り返すことによって得られる集合の全体を $\mathcal{F}$ とするのである．

ところで，σ 加法性は，集合を可算無限個の部分集合の直和に分解する論法であるが，非可算無限個の部分集合の直和に分解することは許されていない．したがって，集合 $I=[0,1]$ を非可算無限個の点 $x\in I$ に分解して，

$$P(I)=\sum_{x\in I}P(\{x\})=0$$

とすることはできない．この等式に表現される不合理をゼノンのパラドックスと言うが[傍注6]，σ 加法性を基軸とする測度論においては，ゼノンのパラドックスが出現する隙はない． ◇

［傍注6］「飛び行く矢は静止している」という逆理．

例 14.3 区間 $I=[0,1]$ に含まれる有理数の全体を $\dot{I}$ とする．$\dot{I}$ は可算集合であるから，例 14.1 のようにして離散分布を定義することができるが，それとは別に，$\dot{I}$ 上の‘一様分布’について考える．閉区間 $J(\subset I)$ に含まれる有理数の全体を $\dot{J}$ と書く．例 14.2 と同様にして，

$$P(\dot{J})=b-a\,,\quad J=[a,b]\subset I \tag{14.9}$$

を満たす σ 加法的確率測度 P を作ることができるだろうか．この場合，有限加法的確率測度は問題なく作れるのだが，定理 14.1 を用いて，それを σ 加法的測度に拡張することができない．実際，(14.9) において $a=b$（有理数）とすると $P(\{a\})=0$ となるが，全体集合 $\dot{I}$ は可算集合であるから，σ 加法性が成り立つとすると $P(\dot{I})=0$ となってしまう． ◇

例 14.4 数直線上の格子点全体 $\mathbb{Z}$ の上の単純ランダムウォークにおける無限長経路を考える．すなわち，$\{0,1,2,\cdots\}$ から $\mathbb{Z}$ への写像 ω であって，

$$\omega(0)=0\,,\quad |\omega(j)-\omega(j-1)|=1\,,\quad j=1,2,\cdots \tag{14.10}$$

を満たすものの全体を Ω とする．経路 ω の第 j ステップ $\omega(j)-\omega(j-1)$ を $v_j(=\pm1)$ とし，指定された $v_1,v_2,\cdots,v_n$ をもつ $\omega\in\Omega$ の全体を $A_{v_1,\cdots,v_n}$ とする．ただし $n=1,2,\cdots$ である．問題は，σ 加法的確率測度 P で

$$P(A_{v_1,\cdots,v_n})=2^{-n} \tag{14.11}$$

を満たすものを作ることである．そのためには，$A_{v_1,\cdots,v_n}$ の形の集合をすべて含む有限加法族 $\mathcal{F}'$ を定め，その上で (14.11) を満たすように有限加法的確率測度を定義し，定理 14.1 を用いて，σ 加法的確率測度に拡張すればよい．詳細については，例えば文献 3) を参照されたい．このような σ 加法的な枠組みの中で無限長経路の確率論を考えれば，前回取り上げた再帰確率を直截に定義できる． ◇

例 14.2，例 14.4 において，σ 加法族 $\mathcal{F}$ の具体像は描きにくい．しかしいずれも，集合論の言葉を使って定義されている．したがって，集合論が矛盾を含まないなら，確率論も矛盾を含まない．第 3 回目に，「客観的に真偽を判定できない文脈で確率という言葉を使うと矛盾に陥ることがある」と指摘したが，客

観的に真偽を判定できる文脈で確率という言葉を使えば，経験的には，矛盾に陥ることはない．ここでもう一歩踏み込んで，論理的に無矛盾性を保証しようとすると，公理論的な方法をとる必要がある．コルモゴロフの公理系は，σ 加法性を満たす確率論の無矛盾性を集合論の無矛盾性に還元するものである．

14.3 ボレル–カンテリの定理

確率論の公理における σ 加法性の意義を見るために，ボレル–カンテリの定理を示す．以下において，P を σ 加法族 $\mathcal{F}$ の上で定義された σ 加法的確率測度とする．まず，$A, B \in \mathcal{F}$ に対して，

$$A \subset B \quad \Longrightarrow \quad P(A) \leq P(B) \tag{14.12}$$

が成り立つことに注意する．この不等式は，$C = B \backslash A = B \cap A^c$ とおいて，$B = A \cup C$ という直和分解を用いれば，

$$P(B) = P(A) + P(C) \geq P(A)$$

のようにして確かめることができる．

また，次の定理は一見自明のようだが，σ 加法性の帰結である[傍注7]．

[傍注7]　例 14.3 の有限加法的確率測度の場合，(14.13) は成立しない．

定理 14.2　$A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F}$ に対し，

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \tag{14.13}$$

が成り立つ．　◇

証明　与えられた $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F}$ に対し，

$$B_1 = A_1,$$
$$B_n = A_n \backslash \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k, \quad n = 2, 3, \cdots$$

とおく．すると，$B_n \in \mathcal{F}, n = 1, 2, \cdots,$ となり，どの 2 つも共通要素をもたない．そして

$$B_n \subset A_n, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

を満たす．したがって，σ 加法性と (14.12) により，

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(B_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$$

となる．　□

定理 14.2 を用いて，次のボレル–カンテリの定理を示す．

定理 14.3 もしも事象 $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F}$ が

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \tag{14.14}$$

を満たすならば,

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 0 \tag{14.15}$$

が成り立つ. ◇

まず, 定理の意味を確認しよう. 可算無限個の事象 $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F}$ に対し, $\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ は,「$A_n, A_{n+1}, A_{n+2}, \cdots$ のうち少なくとも 1 つが起きる」という事象である. したがって, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ は,「任意の n に対して, 事象 $\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ が起きる」, すなわち,「$A_1, A_2, A_3, \cdots$ のうち無限に多くのものが起きる」という意味になる. したがって, 直観的に言えば, (14.15) は,「事象 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ のうち, 有限個のものしか起きない」ということを意味する.

証明

$$X_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \quad n = 1, 2, \cdots$$

$$X = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$$

とおく. $X \subset X_n$ であるから, (14.12), (14.13) により,

$$P(X) \leq P(X_n) \leq \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k). \tag{14.16}$$

さて, 仮定 (14.14) の下で,

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = 0$$

が成り立つので, (14.16) より $P(X) = 0$, すなわち, 結論 (14.15) を得る. □

冒頭の「天使の計算」は, 定理 14.3 の意味を説明するための譬え話であるが, ランダムウォークの再帰性に関係する例を 1 つ挙げよう.

例 14.5 3 次元格子 $\mathbb{Z}^3$ 上の単純ランダムウォークを考える. すなわち, 原点 O を出発点とし, 各ステップは独立で, 6 個の最隣接点への遷移確率をすべて $\frac{1}{6}$ とする. この確率モデルは, 例 14.4 と同様にして実現できる. さて,「n ステップ目に原点 O に戻る」という事象を A_n とすると, 定数 C が存在して

$$P(A_n) < \frac{C}{n^{3/2}}$$

が成り立ち,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \tag{14.17}$$

となる[4]．したがって，定理 14.3 により，事象 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ のうち無限に多くのものが起きる確率は 0 である．すなわち，原点に戻る回数は確率 1 で有限である[傍注 8]．

◇

[傍注 8]　(14.17) の下で，前回述べた補題 13.2 を用いると，原点への再帰確率 r は $0 < r < 1$ を満たすことが分かる．

最後に 1 つ注意を付け加える．「事象 A が起きる確率は 0 である（1 である）」という言明と，「A は決して起きない（必ず起きる）」という言明は，全く同じではない．

例えば，区間 $I = [0, 1]$ 上に一様に分布する確率変数 X に対し，X がある 1 点 $a \in I$ に値を取る確率は 0 である．これを「X は値 a を取らない」と言ってしまうと，X の取り得る値がなくなってしまう．これはゼノンのパラドックスの復活である．「$X = a$ となる確率は 0 である」という言明は何を意味するのだろうか．

「確率を測定する」という立場からこの問題を見るために，I 上の一様分布を限りなく理想的な形で実現する機械があるとして，この機械を操作して X の値を N 回発生させる実験を考える．このとき $X = a$ となる回数を k とすると，k が N に比べて十分小さく，$k = o(N)$ と考えられるときに，私たちは「$X = a$ となる確率 p は 0 である」と結論するだろう．すなわち，仮に $p \neq 0$ であるとすれば．チェビシェフの不等式により，$\frac{k}{N}$ は（N が極めて大きいとき）p の極めて近くに集中するので，$k = o(N)$ という実験事実は $p \neq 0$ という仮定と矛盾するのである．実際には，何回機械を操作しても a という値は高々 1 回しか出ない（$k \leq 1$）だろう．「$X = a$ となる確率は 0 である」という数学的言明は，このような物理的状況に相当すると考えられる[傍注 9]．

[傍注 9]　素粒子論の M 先生によれば，生命が誕生する確率は 0 であり，歴史上 1 回だけ起きたのだと言う．

***

この連載は今回で終了します．おつき合い下さった読者の方に感謝します．ありがとうございました．

参考文献

1)　コルモゴロフ，『確率論の基礎概念』第 2 版，根本伸司訳，1975，東京図書．
2)　伊藤清三，『ルベーグ積分入門』，1963，裳華房．
3)　伊藤清，『確率論の基礎』[新版]，2004，岩波書店．
4)　福島正俊，数学シリーズ『確率論』，1988，裳華房．

（わたなべ・ひろし，日本医科大学数学教室）

第13回 ゲーム理論講義

仁と破産問題

船木 由喜彦

前回で紹介した安定集合はコアを拡大することを考えたが，今回は，逆にコアを１点に縮小することを考える．そのような解の一つとしてシュマイドラーの考案した仁がある．仁も多彩な応用がある協力ゲームの興味深い解の一つである．

13.1 仁の定義

コアの問題点は，存在しない場合があること，また，存在しても多くの配分を含み，ただ一つの配分を定めることができないことである．これらを克服する解として，シュマイドラーの考案した仁（nucleolus）を紹介する．

仁は次の提携の持つ**不満**という値に基づいて定義される．$I(v)$ を配分の集合とする．$x \in I(v)$ としたとき，$S \subseteq N$ に対する不満（余剰）$e(S,x)$ は $e(S,x) = v(S) - \sum_{i \in S} x_i$ として定義される．すなわち，提携値からその配分の与える利得の和を引いた値である．この値は提携にとって，本来獲得可能な利得からどの程度，獲得利得が少ないかあるいは多いかを表しているので提携を形成したときの提携にとっての不満，あるいはこの値が負のときの絶対値は提携の得た余剰と解釈することができる．明らかにすべての不満がゼロ以下であるような配分の集合はコア $C(v)$ に一致する．すなわち，$C(v) = \{x \in I \mid e(S,x) \leq 0,\ \forall S \subset N\}$ である．

それでは文献4) に従い，仁を厳密に定義しよう．配分 $x \in I(v)$ に対し，各提携 $S \subset N (S \neq \emptyset)$ の不満を大きい順に並べたベクトルを**不満ベクトル**と呼び，次のように定義する．

$$\theta(x) = (\theta_1(x), \theta_2(x), \cdots, \theta_{2^n-2}(x)) = (e(S_1,x), e(S_2,x), \cdots, e(S_{2^n-2},x)).$$

ここで，$e(S_1,x) \geq e(S_2,x) \geq \cdots \geq e(S_{2^n-2},x), S_k \neq \emptyset, S_k \subset N$ である．2

つの不満ベクトル $\theta(x), \theta(y)$ の間の大小関係を比較するために次の辞書式順序 $\leq_L, >_L$ を導入しよう．$\theta(x) \leq_L \theta(y) \iff \theta(x) >_L \theta(y)$ が成り立たない．

$$\begin{aligned}\theta(x) >_L \theta(y) \iff & \text{ある } k \text{ に対し } \theta_1(x)=\theta_1(y),\quad \theta_2(x)=\theta_2(y),\quad \cdots,\\ & \theta_{k-1}(x) = \theta_{k-1}(y),\quad \theta_k(x) > \theta_k(y).\end{aligned}$$

すなわち，$>_L$ は，第 1 成分から順に比較していき，初めて異なる成分が現れたときの大小関係で，2 つのベクトル x, y の大小を比較している．このとき，仁 $\mathcal{N}(v)$ は次のように定義される．

$$\mathcal{N}(v) = \{x \in I(v) |\ \text{すべての } y \in I(v) \text{ に対して} \quad \theta(x) \leq_L \theta(y)\}.$$

すなわち，仁は次のように解釈できる．配分が与えられたとき，各提携はそれに対する様々な値の不満をもつ，不満はできるだけ小さいほうが良いが，どの提携の不満を優先させるか判断することは難しい．そこで，それらの不満のうち最大のものに着目し，それを小さくするような配分を求める．そのような配分は必ずしも，ただ一つの配分になるとは限らない．その際にはそれらの配分に対し，各提携の 2 番目に大きい不満に着目し，それを最小化する配分を求める．そのような配分が複数以上存在する場合は，3 番目に大きい不満に着目して，このプロセスを続ける，そのとき，このプロセスによって最終的に到達した配分が仁である．

定理 13.1　配分の集合が空集合でない特性関数形ゲームにおいて，仁は必ず存在し，ただ一つの配分からなる．

この定理の証明は次節の仁を線形計画問題で求めるステップのところで説明する．仁は常に 1 点であるので $\mathcal{N}(v)$ はその 1 点のベクトルを表すものとする．

13.2 最小コア，ϵ コアとの関係

コアに類似した概念として ϵ コアを定義し，それと仁の関係を考えることにより仁を線形計画問題によって計算することができる．すべての提携に対して，不満が ϵ 以下であるような配分の集合は **ϵ コア** $C_\epsilon(v)$ と呼ばれる．すなわち，$\epsilon \in \mathcal{R}$ に対し，

$$C_\epsilon(v) = \{x \in I(v) \mid e(S,x) \leq \epsilon,\ \forall S \subset N, S \neq \emptyset\}.$$

これは，各提携の形成に ϵ だけのコストまたは補助が付与されたときのゲームのコアと考えられる．$\epsilon \leq 0$ のとき，ϵ コアはコアに含まれる．すべての非空な ϵ コアの共通部分を**最小コア** $LC(v)$ と呼ぶ．すなわち，

$$LC(v) = \bigcap_{C_\epsilon(v)\neq\emptyset} C_\epsilon(v) = C_{\epsilon_0}(v),$$

ここで，$\epsilon_0 = \min_{x \in I(v)} \max\{e(S,x) | S \subset N, S \neq \emptyset\}$ である．

定理 13.2 配分集合が存在する任意のゲーム (N, v) において仁 $\mathcal{N}(v)$ はすべての $\epsilon \in \mathcal{R}$ に関して，ϵ コア $C_\epsilon(v)$ が存在する限り $C_\epsilon(v)$ に含まれる．さらに，最小コア $LC(v)$ に含まれる．

証明 ある ϵ に関して，$\mathcal{N}(v) \notin C_\epsilon(v)$ と仮定する．そのとき，ある提携 S が存在して $e(S, \mathcal{N}(v)) > \epsilon$ が成り立つ．ところが ϵ コア $C_\epsilon(v)$ に含まれる任意の配分 x に対し，$e(T, x) \leq \epsilon$ がすべての $T \subset N$, $T \neq \emptyset$ に対して成り立つので $\theta(x) <_L \theta(\mathcal{N}(v))$ となり，矛盾である．仁はすべての非空な $C_\epsilon(v)$ に含まれるので，最小コア $LC(v)$ にも含まれる．（証明終）

この最小コアの考え方を用いると，次のような多段階の線形計画問題で仁を求めることができる．

優加法性を満たすゲーム (N, v) を考え，$\mathcal{P} = \{S | S \subset N, S \neq \emptyset\}$ とおく．

(1) このゲームの最小コアを $LC = C_{\epsilon_0} = LX^0$ とする．さらに，$\mathcal{Q}^0 = \{S \in \mathcal{P} | e(S, x) = \epsilon_0\}$ とおく．$\epsilon_0 = \min_{x \in I(v)} \max\{e(S, x) | S \in \mathcal{P}\}$ である．これは次の線形計画問題を解き，最適解の集合を LX^0，最適値を ϵ_0 とすることと同じである．

$$\min \epsilon \quad \text{sub to} \ \ \epsilon \geq e(S, x), \ \ \forall S \in \mathcal{P}, \ x \in I(v).$$

(2) LX^0 に関し，最小コアを求めるのと同様に，次の配分の集合 $X^1_\epsilon = \{x \in LX^0 |$ すべての $S \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{Q}^0$に対して，$e(S, x) \leq \epsilon\}$ を求める．さらに，$LX^1 = \bigcap_{X^1_\epsilon \neq \emptyset} X^1_\epsilon = X^1_{\epsilon_1}$ とする．ここで，$\epsilon_1 = \min_{x \in LX^0} \max\{e(S, x) | S \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{Q}^0\}$ である．同時に，$\mathcal{Q}^1 = \{S \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{Q}^0 | e(S, x) = \epsilon_1\}$ とおく．これは次の線形計画問題を解き，最適解の集合を LX^1，最適値を ϵ_1 とすることと同じである．

$$\min \epsilon \quad \text{sub to} \ \ \epsilon \geq e(S, x), \ \ \forall S \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{Q}^0, \ x \in LX^0.$$

(3) (2) と全く同様に LX^1 に関し，$X^2_\epsilon = \{x \in LX^1 |$ すべての $S \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{Q}^1$ に対して，$e(S, x) \leq \epsilon\}$，さらに，$LX^2 = \bigcap_{X^2_\epsilon \neq \emptyset} X^2_\epsilon = X^2_{\epsilon_2}$ とする．ここで，$\epsilon_2 = \min_{x \in LX^1} \max\{e(S, x) | S \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{Q}^1\}$ である．同時に，$\mathcal{Q}^2 = \{S \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{Q}^1 | e(S, x) = \epsilon_2\}$ とおく．以下このステップを続けていくと，最終的には LX^k は 1 点集合になる．それがこのゲームの仁と一致する．

各ステップにおいて $\max\{e(S, x) | S \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{Q}^k\}$ は x の連続関数であるから ϵ_{k+1} が存在し，LX^{k+1} がコンパクト集合になる．したがって，ある時点で，$LX^{k+1} = LX^{k+2} = \cdots$ が成り立ち，このステップは終了し，これ以上不満を最小化できなくなり，それが仁であることがわかる．すなわち，これは仁の存在証明にもなっている．ただし，仁が 1 点であることについては，他の証明が必要となる．それは，例えば，任意の $x, y \in I(v), x \neq y$ に対し，$\theta(x) = \theta(y), x \neq y$ のとき，$\theta(\frac{x+y}{2}) <_L \theta(x)$ が成り立つことを用いて得られるが詳しい証明は文

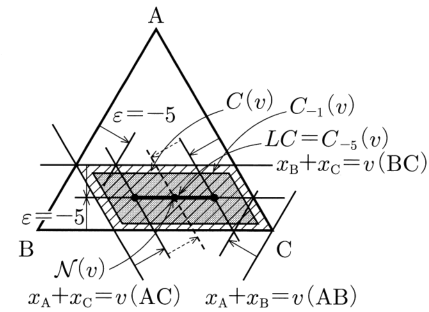


図 13.1 3 人ゲームの最小コアと仁.

献 3, 4) などを参照していただきたい.

このステップを用いて次の A, B, C をプレイヤーとする 3 人ゲームの最小コアと仁を図 13.1 から求めてみよう（これは次節の破産ゲームの例と一致している）.

$$v(\mathrm{ABC}) = 30, \quad v(\mathrm{AB}) = 0, \quad v(\mathrm{AC}) = 10,$$
$$v(\mathrm{BC}) = 20, \quad v(\mathrm{A}) = v(\mathrm{B}) = v(\mathrm{C}) = 0$$

図 13.1 を見ていただきたい. コア $C(v)$（図の斜線部）および, $\epsilon = -1$, $\epsilon = -5$ のときの ϵ コア $C_{-1}(v)$（図の網掛け部）, $C_{-5}(v)$（図の太線）が配分の三角形に図示されている. $\epsilon < -5$ とすると, ϵ コアは消滅してしまうのでこのときの ϵ コア $C_{-5}(v) = \{\ (5, t, 25-t) \mid 5 \le t \le 15\ \}$ が最小コア $LC = LX^0$ となる. したがって $\epsilon_0 = -5$ であり, $\mathcal{Q}^0 = \{BC, A\}$ である. さらに, $\mathcal{Q}^0$ 以外の提携に対して不満を小さくすると $\epsilon = -10$ のとき, X^1_ϵ が一点となり, これより ϵ を小さくすると X^1_ϵ は消滅してしまうことがわかる. したがって, $X^1_{-10} = \{(5, 10, 15)\}$ が LX^1 であり, 仁となる.

さらに, 仁は次の線形計画問題で求めることが知られている（文献 2) 参照）. $\epsilon > 0$ を十分に小さな正数とし, 提携に適当な順番を付け並べたものを $S_1, S_2, \cdots, S_{2^n-2}$ ($S \subset N, S \neq \emptyset$) とし, Π をそのような提携番号の集合 $\{1, 2, \cdots, 2^n - 2\}$ におけるすべての順列の集合とする.

$$\min z \quad \text{sub to } z \ge \sum_{j=1}^{2^n-2} \epsilon^{\pi(j)-1} \left(v(S_j) - \sum_{k \in S_j} x_k \right), \ \forall \pi \in \Pi, \ x \in I(v).$$

このとき, この問題の最適解 x^* が仁となる.

13.3 破産ゲームの仁

ここで, 第 9 回で紹介した破産ゲームについて話を進めたい. 破産ゲームの仁の興味深い性質を説明する前に, この問題の背景を少し紹介しよう.

ユダヤ教の聖典の一つであるバビロニア・タルムードには, 次のような不思議な分配の方法が記されている. ある人が亡くなり財産を残したが, 彼は, 10

万円，20 万円，30 万円の贈与をすることを約束していた．しかしながら，残された額は約束した額の総額より少ないので遺言通りに分配することができない．このとき，もし，残された財産が 10 万円であれば，それぞれの 3 分の 1 の額である $3\frac{1}{3}$ 万円を均等に受け取る．もし，財産が 20 万円であれば，それぞれ，5 万円，7.5 万円，7.5 万円を受け取る．そして，財産が 30 万円であれば，それぞれ，5 万円，10 万円，15 万円を受け取ると記述されていた．この分け方は一見でたらめなように見えるが統一的に説明する論理が存在する．実は，その方法と提携形ゲームの仁が深く関わっている．

この問題において，財産が不足しているのでそれを破産と考えれば，次の破産問題が定義できる．n 人の債権者の集合を $N = \{1, 2, \cdots, n\}$ とし，各人の債権額のベクトルを $d = (d_1, d_2, \cdots, d_n)$ $(d_i > 0, \forall i \in N)$，残された財産額を E とすれば，**破産問題** (N, E, d) が与えられる．この破産問題 (N, E, d) において，提携 S を形成したとき，いかなる裁判もせずに必ず S のメンバーが獲得できる利得は，自分たち以外のプレイヤー $N \setminus S$ に，彼らの債権総額をすべて与えた残りの額である．しかし，獲得できる利得はゼロ以上であるべきなので，それを考慮した上でゲーム (N, v) を定義したものが，次の**破産ゲーム**である．

$$v(S) = \max\left\{0,\ E - \sum_{i \in N \setminus S} d_i\right\}, \quad \forall S \subseteq N.$$

タルムードの問題で $E = 30$ のときの破産ゲームが前節の 3 人ゲームの例として与えられている．確かに，そのときの仁 $(5, 10, 15)$ はタルムードの解と一致している．一般的にはどうであろうか．

数学的には破産問題 (N, E, d) に各債権者への分配額のベクトル $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ を対応させる関数 $y = f(N, E, d)$ を破産問題の解と考える．これは，$\sum_{j \in N} y_j = E = v(N)$, $y_i \geq 0$, $\forall i \in N$ を満たすので，破産ゲームの解と考えることもできる．

文献 1) に従い，この破産問題の解として次のようなものを考えよう．バビロニア・タルムードの注釈書であるミシュナに次のような話がある．「二人の人たちが一つの布を争っている．一人は全部を，他の一人は半分を要求している．そのとき，この二人はそれぞれ，4 分の 3 と 4 分の 1 を受け取る．」この分配の理由付けとして次のようなことが考えられる．

布を全部要求している人は，言い換えると，相手に何も与えないことを主張している．一方，布を半分要求している人は，残りの半分を放棄し相手にあげても良いことを主張している．その放棄した分を相手の当初の取り分とし，その残りを 2 人で均等に分割すると，一方が 4 分の 3 を得，他方が 4 分の 1 を得ることになり，ミシュナの分配が実現される．このような分け方の原理を布争い原理（**CG 原理**）と呼ぶことにしよう．

この CG 原理による分配を 2 人破産問題 $(\{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}, E, (d_{\mathrm{A}}, d_{\mathrm{B}}))$ の解と考え，それを $y = (y_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{B}}) = f^M(\{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}, E, (d_{\mathrm{A}}, d_{\mathrm{B}}))$ と表すと次のようになる．

$$y_{\mathrm{A}} = \frac{1}{2}\bigl(E - \max\{E - d_{\mathrm{A}}, 0\} + \max\{E - d_{\mathrm{B}}, 0\}\bigr),$$
$$y_{\mathrm{B}} = \frac{1}{2}\bigl(E + \max\{E - d_{\mathrm{A}}, 0\} - \max\{E - d_{\mathrm{B}}, 0\}\bigr).$$

もし，このような CG 原理による 2 人の間の分配方法が受け入れられているのであれば，3 人の間の分配方法もこの方法を基準とし，拡張すべきであろう．2 人の分配方法を 3 人の問題に拡張するには，次の**整合性**と呼ばれるゲーム理論や厚生経済学で知られる重要な公平性の基準がある．

3 人 A, B, C の間である財産分配が合意されたと仮定しよう．このとき，A と B は，合意された 2 人の分配額について，その妥当性をもう一度 2 人だけで検討するものとする．その場合，2 人の合計分配額の配分は CG 原理に従うべきである．同様なチェックを A と C の組，B と C の組に対してもすることができる．このようなすべてのペアによる CG 原理による再配分のチェックにパスするような配分は整合性を満たす配分と呼ばれている．実はタルムードによる財産 E の分配はこの基準を満たす唯一の解である（文献 1) 参照）．この解をわれわれは **CG 整合解**と呼ぶことにしよう．n 人破産問題の CG 整合解 $f^{CG}(N, E, d)$ は一般には次のように定義される．$x \in \mathcal{R}^N$ に対し，

すべてのペア $i, j \in N$ に対し
$$f^M\bigl(\{i,j\}, x_i + x_j, (d_i, d_j)\bigr) = (x_i, x_j) \quad \Rightarrow \quad f^{CG}(N, E, d) = x.$$

様々な財産額 E に対する，3 人破産問題の解を図で求める方法は次の下の図　13.2 で与えられる．A, B, C の上のマスはそれぞれ 10 万円，20 万円，30 万円に相当する貯水タンクを表していると考えていただきたい．ただし，各タンクは 2 分割され上部と下部に分かれており，さらに，すべてのタンクは連結されている．ここに残された財産に相当する水量を入れると，各タンクの水位が一致し，その水量が定まる．この量が各債権者の得る分配額に相当する．図では $E = 20$ のケースの水量が示されている．E が 15 万円以下の場合は，A, B, C に均等に水が貯まり，15 万円から 25 万円までは，A は 5 万円のままで，B, C に均等に水が貯まる．25 万円から 30 万円までは，A, B がそれぞれ，5 万円，10 万円のままで，C のみに水が貯まる．30 万円を超えるとちょうど逆の

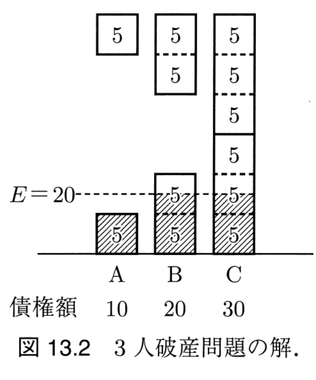


図 13.2　3 人破産問題の解．

順序で水が貯まっていく．任意の2人のタンクをとり，そこでの分配方法を考えると，それはCG原理による分配になっている．したがって，この図で表される分配方法はCG整合解である．タルムードの解とこの図で与えられるCG整合解が一致することを，読者自ら確かめていただきたい．さらに，破産ゲームの仁はこのCG整合解に一致する．この一致の詳細については次回に譲ることにする．

参考文献

1) Aumann, R.J., M. Maschler. "Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud", *J. Econ. Theory* **36**, 195–213, 1985.
2) Kohlberg, E. "The nucleolus as a solution of a minimization problem", *SIAM Journal of Appl. Math.*, **23**, 34–29, 1972.
3) Owen, G. *Game Theory, 2nd edition, 3rd edition*, Academic Press, 1982, 1995.
4) Schmeidler, D. "The nucleolus of a characteristic function game", *SIAM Journal of Appl. Math.*, **17**, 1163–1170, 1969.

（ふなき・ゆきひこ，早稲田大学政治経済学術院）

2007年（1月号〜12月号）総目次

Vol. 45, No. 523〜Vol. 45, No. 534

■名著に親しむ

■連　載

編集後記

私たちの身の回りには様々な現象が存在しています．今回の特集で紹介されていたインフルエンザなどの感染症の伝播もその一つです．

記事の中でも述べられていましたが，人口の集中する都市部は感染症が流行するのに最適な状況とのことです．それにはやはり，予防しておくに越したことはないでしょう．私も予防接種をしに行こうと思います．

小誌は一足先に新年ですが，今年もよろしくお願いします．　（大溝）

＊　　＊

今回のテーマ“現象を視る”上で欠かせないのがシミュレーションですが，特集記事にある多彩な解析結果は特に見物です．上山先生は，どんなに膨大な情報を得ても，そこから現象の肝を引き出す“視力”が大切で，それを鍛えるには最終的に人間そのものの想像力しかない，と指摘されています．まさに眼力を養うことだと思います．肉体的な視力は衰えつつありますが，新年を迎えるにあたっての抱負にしたいと思います．　（伊崎）

数　理　科　学　1月号

2008 年 1 月 1 日発行　　発行人 木　下　敏　孝

数　理　科　学　編　集　部
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

編集スタッフ
平　勢　耕　介　伊　崎　修　通
大　溝　良　平

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで.

発行所　Ⓒ　株式会社 **サ　イ　エ　ン　ス　社**　TEL. (03) 5474–8500 (代表)
〒 151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600 (広告部)

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁